

ת"ז התלמיד _____

מס' סידורי _____

סמסטר א' מועד א' תשס"ד
תאריך הבחינה: 17.2.2004

בחינה במבוא להסתברות
המורים: פרופ' דוד גילת, פרופ' יצחק מלכסון

- משך הבחינה: שלוש שעות
- מותר להשתמש בסיכום אישי בהיקף של עד 2 דפים ובמחשב כיס
- השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. ענה על כולן
- לכל שאלה ניתנות 4 תשובות שאחת ורק אחת מהן נכונה. סימון התשובה הנכונה (במקום המתאים בגוף השאלון ובטבלה שבתחתית עמוד זה) מזכה ב-6 נקודות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.
- הצובר N נקודות יקבל את הציון $\min(100, \max(N, 0))$.

בהצלחה!

סוגיה I

	1	2	3	4	5	6
א						
ב						
ג						
ד						

סוגיה II

	7	8	9
א			
ב			
ג			
ד			

סוגיה III

	10	11	12
א			
ב			
ג			
ד			

סוגיה IV

	13	14	15	16	17	18
א						
ב						
ג						
ד						

סוגיה 1

נתונים שלושה מאורעות C, B, A בעלי הסתברויות $1/2, 1/4, 1/5$ בהתאמה. יהי N המספר (המקרי) של המאורעות שהתרחשו מבין שלושת המאורעות הנתונים.

1. א. המאורע $[N = 3]$ הוא המשלים של אחד המשלימים של שלושת המאורעות הנתונים.
- ב. המאורע $[N = 1]$ הוא המשלים של אחד שלושת המאורעות הנתונים.
- ג. המאורע $[N = 0]$ הוא אחד המשלימים של שלושת המאורעות הנתונים.
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

$$E(N) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{19}{20} \quad \text{א. 2.}$$

$$E(N) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{40} \quad \text{ב.}$$

- ג. אי אפשר לחשב את $E(N)$ ללא נתונים נוספים.
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

$$Var(N) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{239}{400} \quad \text{א. 3.}$$

$$Var(N) = \frac{361}{400} \quad \text{ב.}$$

- ג. אי אפשר לחשב את השונות של N ללא נתונים נוספים.
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

4. בהנחה שהמאורעות C, B, A זרים בזוגות:

$$\text{א. השונות של } N \text{ היא } \frac{19}{400}.$$

$$\text{ב. } Var(N) = 1$$

- ג. דרושים נתונים נוספים לחישוב השונות של N .
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

5. בהנחה ש- $A \subset B \subset C$, השונות של N היא:

$$\text{א. } \frac{5}{4}$$

$$\text{ב. } \frac{539}{400}$$

- ג. דרושים נתונים נוספים לקביעת השונות.
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

6. בהנחה ש- C, B, A בלתי תלויים (הדדית):

$$\text{א. } P[N = 2] = \frac{3}{10}$$

$$\text{ב. } P[N = 0] = \frac{3}{10}$$

- ג. דרושים נתונים נוספים לקביעת ההסתברויות הנ"ל.
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

סוגיה II

מכוניות מגיעות למגרש חניה דרך שתי כניסות א' ו-ב' באופן בלתי תלוי. ידוע שמספר המכוניות המגיעות דרך כניסה א' מפולג פואסוניית עם תוחלת (פרמטר) α ומספר המכוניות המגיעות דרך כניסה ב' מפולג פואסוניית עם תוחלת β .

7. ההתפלגות של מספר המכוניות המגיעות למגרש החניה היא:
- פואסוניית עם (פרמטר) $\alpha\beta$.
 - לא פואסוניית.
 - פואסוניית עם (פרמטר) $\alpha + \beta$.
 - אף אחת מהנ"ל.
8. בהנתן כי הגיעו למגרש n מכוניות, ההסתברות (המותנה) שכל המכוניות נכנסו דרך כניסה א' היא:
- $1 - (\alpha / (\alpha + \beta))^n$.
 - $(\beta / (\alpha + \beta))^n$.
 - $(\alpha / (\alpha + \beta))^n$.
 - אף אחת מהנ"ל.
9. ההתפלגות המותנה של מספר המכוניות שנכנסו דרך כניסה א', בהנתן שהגיעו n מכוניות למגרש, היא:
- בינומית עם פרמטרים n ו- $p = \alpha$.
 - בינומית עם פרמטרים n ו- $p = \alpha / (\alpha + \beta)$.
 - פואסוניית עם פרמטר α .
 - היפרגיאומטרית.

סוגיה III

יהי S_n מספר ה"הצלחות" ב- n נסיונות בלתי תלויים כאשר הסתברות ה"הצלחה" בכל ניסוי היא $\frac{1}{2}$.

10. $E\left(S_n - \frac{n}{2}\right)^4$ היא:

א. $\frac{n^4}{16}$

ב. $\frac{n^2}{16}$

ג. $\frac{n^4}{8}$

ד. $\frac{3n^2 - 2n}{16}$

בשאלות 11 ו-12, שימו לב להבדל בין $>$ ו- \geq .

11. יהי $n = 400$. בעזרת אי-שוויון צ'בישב נקבל:

א. $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| < 20\right] > \frac{3}{4}$

ב. $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq 20\right] \leq \frac{1}{16}$

ג. $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq 20\right] \geq \frac{1}{4}$

ד. אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.

12. יהי $n = 400$. בעזרת המומנט המרכזי הרביעי (סעיף 10) ואי-שוויון מרקוב נקבל:

א. $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| < 20\right] > \frac{3}{4}$

ב. $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq 20\right] \leq \frac{1}{16}$

ג. $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq 20\right] \geq \frac{1}{4}$

ד. אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.

סוגיה IV

בכד m כדורים לבנים ו- n שחורים. דוגמים באופן מקרי את $m+n$ הכדורים מן הכד בזה את זה, בלי החזרות. יהי X_1 מספר הכדורים הלבנים שנדגמו מן הכד לפני הכדור השחור הראשון, X_2 - מספר הלבנים בין השחור הראשון לשני, \dots, X_{n+1} - מספר הלבנים אחרי השחור האחרון.

13. ההסתברות $P(X_1 \geq k)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) היא:

- א. $\frac{k}{m}$.
- ב. $\frac{m-k}{m+n}$.
- ג. $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}}$.
- ד. $\frac{\binom{m}{k}}{\binom{m+n}{k}}$.

14. ההסתברות $P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_{n+1} = k_{n+1})$ היא:

- א. $\frac{m!n!}{(m+n)!}$.
- ב. $\frac{k_1!k_2!\dots k_{n+1}!}{m!n!}$.
- ג. $\frac{k_1!k_2!\dots k_{n+1}!}{(m+n)!}$.
- ד. אף אחד מהנייל.

15. המשתנים המקריים X_1, X_2, \dots, X_{n+1} הם:

- א. בי"ת ושי"ה.
- ב. בלתי מתואמים אך לא בי"ת.
- ג. בי"ת אך לא שי"ה.
- ד. שי"ה אך לא בלתי מתואמים.

16. התוחלת $E(X_1)$ היא:

א. $\frac{n}{m+1}$

ב. $\frac{m}{n+1}$

ג. $\frac{m}{m+n}$

ד. $\frac{n}{m+n}$

17. יהיו $v = \text{Var}(X_1)$ ו- $c = \text{Cov}(X_1, X_2)$. היחס $\frac{c}{v}$ שווה ל-:

א. $\frac{1}{n}$

ב. $-\frac{1}{n}$

ג. $\frac{m+n}{mn}$

ד. $-\frac{m+n}{mn}$

18. מקדם המתאם $\rho(X_1, X_2)$ הוא:

א. $\frac{1}{n}$

ב. $-\frac{1}{n}$

ג. $\frac{m+n}{mn}$

ד. $-\frac{m+n}{mn}$