

פתרון הבחינה של פרופ' צירלסון מ 15/6/04

הבחינה נמצאת באתר של פרופ' צירלסון : <http://www.math.tau.ac.il/~tsirel>

1.
$$\frac{2}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{35}$$

2. יש חמישה מיקומים אפשריים של הצרוף. בכל אחד מהם הסכוי שהצירוף יופיע הוא $\frac{1}{35}$.

לכן
$$E(X) = 5 \cdot \frac{1}{35} = \frac{1}{7}$$

3. ראשית 2,004 צריך להופיע בארבע המקומות הראשונים. ראינו שלכך הסכוי הוא $\frac{1}{35}$. בהינתן

שזה קורה צריך להתרחש אירוע שההסתברות שלו היא $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

לכן הסכוי הוא $\frac{1}{35} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{420}$

4. אם המעלית תעלה עד הקומה השלישית אז $(T > 30)$. צריך שיתקיים $(H = 2, N = 2)$.

ההסתברות שכולם יעלו לקומה הראשונה או השנייה היא $\frac{\binom{6}{3}}{\binom{9}{3}}$. מזה צריך להחסיר את ההסתברות

שכולם ירצו לרדת רק בקומה הראשונה או רק בקומה השנייה.
$$p = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{9}{3}} - 2 \cdot \frac{\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{3}{14}$$

5. כל הזוגות תלויים. $(N = 3)$ כופה ערכים מסוימים על T ועל H . T מכסימלי אפשרי כופה $(H = 3)$.

6. מעבר על-פני הערכים האפשריים של T מראה שעבור כל T אפשרי רק N אחד מסוים לכן $E(\text{Var}(N/T)) = 0$.

7. שום קשר הוא לא מונוטוני לינארי: אפשרי $(N = 1, T = 15)$ אבל גם $(N = 1, T = 25)$, אפשרי $(N = 1, H = 2)$ אבל גם $(N = 1, H = 3)$, אפשרי $(H = 2, T = 30)$ אבל גם $(H = 2, T = 25)$. לכן לכל מקדמי המתאם ערך מוחלט שקטן מ 1.

8. או ששתהן 2 או שאחת מהן 1 והשניה 2:
$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

9. תוחלת סכום האינדיקטורים שווה לסכום התוחלות: $\frac{\binom{10}{2}}{3} \cdot \frac{1}{3} = 15$

10. או ששרית היא 2 וכל אחד מהאחרים הוא לפחות 1 או ששרית היא 1 וכל אחד מהאחרים הוא 2:

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{27}$$

11. השונות שווה לסכום השונות של האינדיקטורים, כאשר כל אינדיקטור הוא זוג מסוים ועוד סכום ה cov של זוגות שהם מתואמים. הזוגות שהם מתואמים הם רק הזוגות שלהם יש אלמנט משותף.

סכום השונות של האינדיקטורים הוא: $\left(\frac{10}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 10$ יש $10 \cdot \binom{9}{2} = 360$ זוגות של זוגות

בעלי אלמנט משותף. לגבי כל אחד מהם ה cov שווה ל $\frac{5}{27} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

$$10 + 2 \cdot 360 \cdot \frac{2}{27} = 63.33 > 4 \cdot 15 = 4E(X)$$

12. משיקולי סימטריה, הסכוי ש Z הוא המכסימלי בין שלושת השונים הוא $\frac{1}{3}$.

13. $Z \sim U(1,10)$, לכן הסכוי הוא 0.1. **14.** $\frac{P(Z=8, Y < Z)}{P(Y < Z)} = \frac{0.1 \cdot \frac{7}{9}}{0.5} = \frac{7}{45}$

15. $\frac{P(Z=8, X < Y < Z)}{P(X < Y < Z)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3!}} = \frac{7}{40}$ הסבר: בהינתן ש $(Z=8)$ הסכוי ששני

האחרים קטנים ממנו ממש הוא $\frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8}$ ובהינתן שזה קורה הסכוי ש $(X < Y)$ הוא $\frac{1}{2}$.

16. $N \sim (0,9)$, לכן ההסתברות היא 0.1.

בוחרים בהתפלגות אחידה על-פני הפרמוטציות פרמוטציה של המספרים $1, 2, \dots, 10$. בוחרים בהתפלגות אחידה על המספרים $1, 2, \dots, 10$ את $N+1$. מיקומו של $N+1$ יהיה מיקומו של 3 בפרמוטציה. מספר 1 או 2 נבחר אם מיקומו קטן ממיקום 3 או מ $N+1$.

17. הסכוי שווה לסכוי שהמיקום של 3 הוא 8 בהינתן שהמיקום של 1 קטן מהמיקום של 3:

$$\frac{7}{45} \quad (\text{ראו שאלה 14}).$$

18. הסכוי שווה לסכוי שהמיקום של 3 הוא 8 בהינתן שהמיקום של 1 ושל 2 קטן מהמיקום של 3:

$$\frac{7}{40} \quad (\text{ראו שאלה 15}).$$

19. הסכוי שווה לסכוי של 1 ול 2 יש מיקום נמוך מהמיקום של 3. לכן הסכוי הוא $\frac{1}{3}$.