

סמסטר ב', מועד א', תש"ע, 14.6.2010

בחינה ב"מבוא להסתברות" (המרצה: פרופ' יצחק מלכסון)

משך הבחינה שלוש שעות.
 מותר להשתמש ב-3 דפי סיכומים כתובים או מודפסים (דו-צדדיים) ובמחשבון.

השאלון מורכב מ-19 שאלות. כל תשובה נכונה מזכה ב-6+ נקודות וכל תשובה לא נכונה מזכה ב-2- נקודות. מותר לסמן יותר מתשובה אחת לשאלה.
 אם צברת S נקודות, ציוןך $\min(S, 100)$.

בהצלחה!!!

	1	2	3	4	5
א					
ב					
ג					
ד					

	6	7	8	9	10	11	12
א							
ב							
ג							
ד							

	13	14	15	16	17	18	19
א							
ב							
ג							
ד							

סוגיה ראשונה

מטילים קוביה הוגנת 7 פעמים וכך מקבלים 7 משתנים מקריים בלתי-תלויים שווי-התפלגות $X_i, 1 \leq i \leq 7$, המתפלגים אחיד על $\{1, 2, \dots, 6\}$. עבור $2 \leq k \leq 7$, ההטלה ה-k "מצליחה" אם $X_k < 2X_{k-1}$. יהי N מספר ההצלחות הכולל (עבור $2 \leq k \leq 7$).

- מצא את ההתפלגות המותנה של N בהנתן ש- $X_1=3$.
 (א) $HG(6, 2, 4)$ (ב) $BIN(6, 1/3)$ (ג) $U\{0, 1, \dots, 6\}$ (ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.
- חשב את התוחלת $E[N]$.
 (א) 3 (ב) 2 (ג) $2(X_1-2)$ (ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.
- כמה ערכים שונים מקבל המ"מ (השוונות המותנה) $Var(N|X_1)$?
 (א) 6 (ב) 3 (ג) 4 (ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.
- חשב את יחס ההסתברויות המותנות $P(X_1=3 | N=2) / P(X_1=4 | N=2)$. (הדרכה: העזר בנוסחת ביז)
 (א) 4 (ב) 2 (ג) 1 (ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.
- חשב את ההסתברות המותנה $P(X_1=3 | N=2)$.
 (א) 1/5 (ב) 4/5 (ג) 1/2 (ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.

סוגיה שניה

בתיכון יש 3 כיתות בשכבה י"ב: כיתה 1 – 25 בנים (ביניהם אלי) ו-15 בנות,
כיתה 2 – 35 בנות ו-10 בנים (ביניהם בני),
כיתה 3 – 25 בנים ו-15 בנות (ביניהם גליה).

בוחרים באקראי כיתה, ובוחרים באקראי 5 חברי ועד מתוך כל תלמידות הכיתה הנבחרת. יהי X מספר הבנות בוועד, ו- Y מספר הכיתה הנבחרת. יהי A_1 המאורע שאלי (הלומד בכיתה 1) נבחר לוועד, A_2 המאורע שבני (הלומד בכיתה 2) נבחר לוועד, A_3 המאורע שגליה (הלומדת בכיתה 3) נבחרה לוועד.

6. לאיזו משפחת התפלגויות שייך X ?

(א) היפרגאומטרית. (ב) בינומית. (ג) נורמלית (בקירוב). (ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.

7. מהו $P(X = 4)$ (עגלי לספרה השלישית אחרי הנקודה)?

(א) 0.173 (ב) 0.175 (ג) 0.177 (ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.

8. מהו $P(Y = 3 | X = 4)$ (עגלי לספרה השלישית אחרי הנקודה)?

(א) 0.097 (ב) 0.1 (ג) 0.052 (ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.

9. איזה מאי-השיויונות הבאים נכון:

(א) $P(A_1) < P(A_3)$ (ב) $P(A_2) < P(A_3)$ (ג) $P(A_1) = P(A_2)$

(ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.

10. מהי $E(X)$ (עגלי לספרה השניה אחרי הנקודה)?

(א) 2.55 (ב) 2.6 (ג) 3.52 (ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.

11. מהי $\text{Var}(X | A_1)$ (עגלי לספרה השניה אחרי הנקודה)?

(א) 1.54 (ב) 1.05 (ג) 0.87 (ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.

12. איזו מהטענות הבאות נכונה לגבי X ו- Y ?

(א) תלויים ומתואמים. (ב) תלויים ובלתי מתואמים.

(ג) בלתי תלויים ובלתי מתואמים. (ד) בלתי תלויים ומתואמים.

סוגיה שלישית

יהיו $X_i, 1 \leq i \leq n+1$, מ"מ בלתי-תלויים ושווי-התפלגות המתפלגים $G(p)$ (גיאומטרית עם פרמטר p).

13. ההתפלגות של המ"מ $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_{n+1}\}$ היא

(א) גיאומטרית (ב) היפרגיאומטרית (ג) בינומית-שלילית (ד) אף תשובה מהני"ל

14. התוחלת $E(\max\{X_1, X_2\})$ שווה ל- (רמז: למה שווה $- \max\{X_1, X_2\} - X_1 + X_2$?)

(א) $\frac{p}{(1-(1-p)^2)^2}$ (ב) $\frac{2}{p} - \frac{p}{(1-(1-p)^2)^2}$ (ג) $\frac{2}{p} - \frac{1}{1-(1-p)^2}$ (ד) אף תשובה מהני"ל

15. ההסתברות $H = P(X_1 > X_{n+1})$ שווה ל-

(א) $1 - p - \frac{p(1-p)^3}{1-(1-p)^2}$ (ב) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2(1-p)}{1-(1-p)^2} \right)$ (ג) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{1-(1-p)^2} \right)$ (ד) אף תשובה מהני"ל

יהי N מ"מ המתפלג $BIN(n, 1/2)$, ב"ת ב- $X_i, 1 \leq i \leq n+1$. יהי M מספר האינדקסים מבין $\{1, \dots, N\}$ שעבורם $X_i < X_{n+1}$ (אם $N=0$ אז M הוא קבוצה ריקה של אינדקסים). יהי H הערך שהוגדר בשאלה הקודמת.

16. התוחלת המותנה $E[M | N=k]$ שווה ל-

(א) $\frac{k}{2}$ (ב) kH (ג) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2(1-p)}{1-(1-p)^2} \right)$ (ד) אף תשובה מהני"ל

17. התוחלת $E[M]$ שווה ל-

(א) $\frac{nH}{4}$ (ב) $\frac{nH}{2}$ (ג) $\frac{kH}{2}$ (ד) אף תשובה מהני"ל אינה נכונה

18. השונות $\text{Var}[M]$ שווה ל-

(א) $\frac{nH}{4}$ (ב) $\frac{n}{4} H^2$ (ג) $\frac{n}{2} H(1-H)$ (ד) אף אחת מהני"ל

19. יהי $p=0.1$ (הפרמטר של המ"מ המתפלגים גאומטרית X_i). באיזה תחום נמצא

$$q = P\left(\frac{1}{400} \sum_{i=1}^{400} X_i < 9.82\right) ?$$

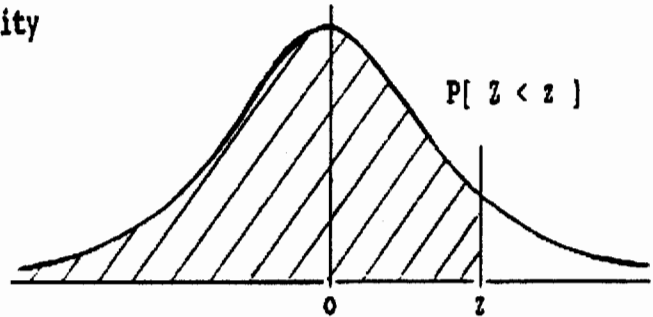
(א) $q > 0.5$ (ב) $0.25 < q < 0.5$ (ג) $0.15 < q < 0.25$ (ד) $q < 0.15$ (T)

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e.

$$P\{ Z < z \} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000