

סמסטר ב', מועד א', תשע"א, 13.6.2011

בחינה ב' מבוא להסתברות" (המרצה: פרופ' אילון סולן)

משך הבחינה שלוש שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום יחיד (דו-צדדי, כתוב או מודפס) ובמחשבון (ללא יכולות גרפיות/תכנותיות).

השאלון מורכב מ-20 שאלות. כל תשובה נכונה מזכה ב-6+ נקודות וכל תשובה שגויה מזכה ב-2- נקודות. מותר לסמן יותר מתשובה אחת לשאלה.
אם צברת S נקודות, ציוןך $\min(S, 100)$.
ייבדקו רק הסימונים בטבלה שבהמשך עמוד זה. שאר טופס המבחן והמחברת משמשים כטיוטא בלבד ולא יבדקו.
יש למלא את מספר תעודת הזהות בשורה המתאימה.

בהצלחה!!!

תעודת זהות: _____

יש לסמן את התשובות בשלוש הטבלאות הבאות. את הסימונים לכל שאלה יש לסמן בעמודה המתאימה.

	1	2	3
א			
ב			
ג			
ד			

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
א										
ב										
ג										
ד										

	14	15	16	17	18	19	20
א							
ב							
ג							
ד							

סוגיה ראשונה

יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים כלשהם (תלויים או בלתי תלויים) ויהי Z משתנה מקרי ברנולי עם פרמטר p בלתי תלוי ב- X וב- Y .
 נגדיר: $W = ZX + (1-Z)Y$ ו- $R = pX + (1-p)Y$.

1. מה ניתן להגיד על התוחלות של W ושל R ?
 (א) התוחלות שוות.

(ב) התוחלת של W קטנה יותר מהתוחלת של R .

(ג) התוחלת של W גדולה יותר גדולה יותר מהתוחלת של R .

(ד) הנתונים אינם מספיקים לקבוע את היחס בין התוחלות.

* חלוקת תלוי או חלוקת נפרד.

2. השונות של W היא:

(א) $p \text{Var}(X) + (1-p) \text{Var}(Y)$

(ב) $p^2 \text{Var}(X) + (1-p)^2 \text{Var}(Y)$

(ג) $p^2 \text{Var}(X) + (1-p)^2 \text{Var}(Y) + 2p(1-p) \text{Cov}(X, Y)$

(ד) $p \text{Var}(X) + (1-p) \text{Var}(Y) + p(1-p)(E[X]-E[Y])^2$

$$V(W) = E_Z (V(W|Z)) + V_Z (E(W|Z))$$

$V(W) = V(Y)$ $Z=0$ מתקיים קב'נתן

$V(W) = V(X)$ $Z=1$ מתקיים קב'נתן

$E_Z (V(W|Z)) = (1-p) \cdot V(Y) + p \cdot V(X)$ אכן

$E(W) = E(Y)$ $Z=0$ מתקיים קב'נתן

$E(W) = E(X)$ $Z=1$ מתקיים קב'נתן

$V_Z (E(W|Z)) = (1-p) \cdot E^2(Y) + p \cdot E^2(X)$ אכן

$- ((1-p)E(Y) + pE(X))^2$

מה ניתן להגיד על השונות של W ושל R?
 מרכזים

3. מה ניתן להגיד על השונות של W ושל R?
 (א) $Var(W) = Var(R)$
 (ב) $Var(W) \leq Var(R)$ ולא ניתן לומר ש-(א) בהכרח מתקיים.
 (ג) $Var(W) \geq Var(R)$ ולא ניתן לומר ש-(א) בהכרח מתקיים.
 (ד) הנתונים אינם מספיקים לקבוע את היחס בין השונות.

סוגיה שנייה

נתונה קובייה הוגנת (שבה כל פאה מתקבלת בהסתברות $1/6$) עם 2 פאות לבנות ו-4 פאות שחורות. מטילים את הקובייה שוב ושוב עד שבסדרת ההטלות מתקבלות פאות משני הצבעים. יהי X מספר הפעמים שהקובייה הוטלה (כלומר, מספר ההטלות עד שהתקבלו פאות משני הצבעים). יהי W מספר ההטלות עד הפעם הראשונה שמתקבלת פאה לבנה. יהי B מספר ההטלות עד הפעם הראשונה שמתקבלת פאה שחורה.

4. ההתפלגות של X היא:
 (א) גיאומטרית
 (ב) בינומית
 (ג) בינומית שלילית (אך לא גיאומטרית)
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- $$P(X=k) = \binom{2}{6}^{k-1} \cdot \frac{4}{6} + \binom{4}{6}^{k-1} \cdot \frac{2}{6}$$
- $k \geq 2$ ו/או

5. מה היא ההסתברות ש-X שווה ל-4?

- (א) $1/16$
 (ב) $10/81$
 (ג) $17/81$
 (ד) $2/9$
- $$\left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{4}{6}\right)^3 \cdot \frac{2}{6}$$

6. מה היא ההסתברות ש-X גדול ממש מ-4?

- (א) $1/16$
 (ב) $10/81$
 (ג) $17/81$
 (ד) $2/9$
- (זריק 4 פעמים וזכורות יתקבלו פאות לבנות)
 (זריק 4 פעמים וזכורות יתקבלו פאות שחורות)
- $$\left(\frac{2}{6}\right)^4 + \left(\frac{4}{6}\right)^4$$

7. מה היא ההסתברות ש-X שווה ל-5 בהינתן ש-X גדול ממש מ-4?

- (א) $2/27$
 (ב) $6/17$
 (ג) $1/2$
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- $$\frac{\left(\frac{2}{6}\right)^4 \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{4}{6}\right)^4 \cdot \frac{2}{6}}{\left(\frac{2}{6}\right)^4 + \left(\frac{4}{6}\right)^4}$$
- (ג) א'על' הסתברות מותנה: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

8. איך מתפלג X בהינתן ש-W שווה ל-1: מדצגים נוס' אחרז ואלס מסבר

הנסאות פטוסים מתפלג
גאומטרית עם פתח יציא.

(א) X-1 מתפלג גיאומטרית

(ב) X-2 מתפלג גיאומטרית

(ג) X מתפלג בינומית שלילית

(ד) אף תשובה אינה נכונה

9. מה היא השונות של X בהינתן ש-W שווה ל-1:

(א) 0.25

(ב) 0.75

(ג) 2

(ד) אף תשובה אינה נכונה

שונות של מסתנה גאומטרי:

$$\frac{\frac{2}{6}}{\left(\frac{2}{6}\right)^2}$$

קב'נתן קב'תה קב'אלת שאלה. עסן

10. השונות של X בהינתן ש-W שווה ל-2:

(א) גדולה יותר מאשר התשובה לסעיף 9.

(ב) קטנה יותר מאשר התשובה לסעיף 9.

(ג) שווה לתשובה בסעיף 9.

(ד) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

מסתנה מנוון וכמה יש לו שונות

0.

ניתנה גיט בלית הפלסלה הפלסונה:

$$\frac{2}{6} \left(1 + \frac{1}{6}\right) + \frac{4}{6} \left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

11. למה שווה התוחלת של X:

(א) 2.25

(ב) 3

(ג) 3.5

(ד) 4

$$V(X) = V(W+B-1) \stackrel{\text{הצטרף}}{=} V(W+B)$$

$$= V(W) + V(B) + 2 \cdot \text{Cov}(W, B)$$

$$V(W) = \frac{\frac{2}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} \quad V(B) = \frac{\frac{4}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}$$

ולפיכך Cov מהו גתסארה 13.

12. למה שווה השונות של X:

(א) 0.5

(ב) 3.375

(ג) 4.25

(ד) 4.75

13. מה היא השונות המשותפת בין B ו-W:

(א) -6.75

(ב) -1

(ג) 0

(ד) 6.75

$$\text{Cov}(W, B) = E(WB) - E(W) \cdot E(B)$$

$$E(WB) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\right) + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

יש כמה
דברים שמתוה:
אלת מרן הא
עמי נוסדת
פ'ה קה'סאות
אק נבתי אית

סוגיה שלישית

מחלקים 24 ילדים לשתי קבוצות, A ו-B, כך שכל ילד באופן בלתי תלוי באחרים שייד בהסתברות שווה לכל קבוצה.
יהי X_0 מספר הילדים בקבוצה A.

14. ההתפלגות של המשתנה המקרי X_0 היא?

$$B\left(24, \frac{1}{2}\right)$$

- (א) בינומית
- (ב) אחידה
- (ג) היפרגאומטרית
- (ד) גאומטרית

אחר החלוקה הראשונית בוחרים באקראי ילד מבין 24 הילדים ומעבירים אותו מהקבוצה שבה היה לקבוצה השניה. חוזרים על כך שוב ושוב באופן בלתי תלוי בין הבחירות. נגדיר:

X_n - מספר הילדים בקבוצה A לאחר n העברות.

Y_n - מספר הילדים בקבוצה B לאחר n העברות.

צ"ל לכל ילד יש סיכוי שווה להיות
קבוצה אחת מהקבוצות. אין תלות
בין ילדים שונים. אם נבחרת ה"א
אז יש $B\left(24, \frac{1}{2}\right)$ משתנה
שהוא $24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

15. מהי השונות של X_{17} ?

- (א) 12
- (ב) 6
- (ג) 3

(ד) לא ניתן לדעת מהנתונים.

16. המשתנים המקריים $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ הינם:

- (א) תלויים ושווי התפלגות
- (ב) בלתי תלויים ושווי התפלגות
- (ג) בלתי תלויים ושוני התפלגות
- (ד) תלויים ושוני התפלגות

תלויים כי למשל

$$P(X_1=7 | X_0=3) = 0 \neq P(X_1=7)$$

$$\frac{X_0}{24} (X_0 - 1) + \frac{24 - X_0}{24} (X_0 + 1)$$

17. למה שווה $E[X_1 | X_0]$?

א) 12

ב) $1 + \frac{11}{12} X_1$

ג) $1 + \frac{11}{12} X_0$ (ג)

ד) 23/12

$$\frac{X_0}{24} ((X_0 - 1) \cdot X_0) + \frac{24 - X_0}{24} ((X_0 + 1) \cdot X_0)$$

18. למה שווה $E[X_1 \cdot X_0 | X_0]$?

א) 72

ב) 144

ג) $X_0 + \frac{11}{12} X_1 X_0$

ד) $X_0 + \frac{11}{12} X_0^2$ (ד)

$$\rho(X_0, X_1) = \frac{\text{Cov}(X_0, X_1)}{\sqrt{V(X_0) V(X_1)}}$$

19. מה הוא מקדם המתאם בין X_0 ל- X_1 ?

א) 11/18

ב) 11/12 (ב)

ג) 1

ד) אף תשובה איננה נכונה

$$\text{Cov}(X_0, X_1) = E(X_0 \cdot X_1) - E(X_0) \cdot E(X_1)$$

$$E(X_0) = E(X_1) = 12$$

$$E(X_0 \cdot X_1) = E\left(X_0 + \frac{11}{12} X_0^2\right) =$$

$$E(X_0) + \frac{11}{12} (V(X_0) + E^2(X_0)) = \dots$$

20. מה הוא מקדם המתאם בין X_n ל- X_{n+1} ?

א) -1 (א)

ב) 1

ג) 0

ד) -0.7

$$Y_n = 24 - X_n \quad \text{ככל ש } h \geq 0$$

א' קצר
ב' ארוך
ג' ארוך ואם כמותם
ד' כטל

© כל הזכויות שמורות

פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.

אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ

לאתר של שלומי.