

**בחינה במבוא להסתברות**  
 המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.  
 מותר (אבל לא הכרחי) להשתמש במחשבון.  
 השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. ענה על כולן.  
 לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה. באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).  
 סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.  
 הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

	X				X		X	X
		X			X	X	X	X
			X		X	X	X	X
			X	X	X	X	X	X
0	-2	6	-2	-2	-4	4	4	0

דוגמה:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.  
 לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית.

בהצלחה!

	1	2	3
א			
ב			
ג			
ד			

	4	5	6	7	8	9
א						
ב						
ג						
ד						

	10	11	12	13	14
א					
ב					
ג					
ד					

	15	16	17	18	19	20
א						
ב						
ג						
ד						

## סוגיה 1

מבצעים סידרה של  $n$  הטלות מטבע הוגן (הסתברויות  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ). יהי  $X$  מספר ההצלחות.

1. בשימוש באי-שוויון צ'בישב, ה- $n$  המינימלי כך ש- $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right) \leq \frac{1}{16}$  הוא: (א) 40 (ב) 20 (ג) 200

2. בשימוש בקירוב נורמלי, עבור ה- $n$  המינימלי משאלה 1, ההסתברות  $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right)$  היא: (א) 0.046 (ב)  $< 0.0001$  (ג) 0.023

3. הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  היא: (א)  $< 0.0001$  (ב) 0.046 (ג) 0.023

## סוגיה 2

מבצעים את סדרת הניסיונות הבאים: בניסיון הראשון מוצאים באקראי כדור מכד המכיל לבן אחד ושחור אחד. מתבוננים בצבע הכדור ומחזירים לכד את הכדור שהוצא ומוסיפים לכד כדור נוסף מאותו צבע. בניסיון השני שוב מוצאים באקראי כדור, מתבוננים בצבעו ומחזירים את הכדור שהוצא ומוסיפים כדור נוסף מאותו צבע. וכך הלאה. יהי  $X_k = 1$  אם הכדור שהוצא בניסיון ה- $k$  הוא לבן, ו- $X_k = 0$  אחרת, ו- $Y_k$  מספר הלבנים בכד אחרי ניסיון ה- $k$ .

4. ההסתברות המותנה  $\mathbb{P}(X_1 = 1 | X_2 = 1)$  היא: (א)  $\frac{1}{2}$  (ב)  $\frac{1}{3}$  (ג)  $\frac{2}{3}$

5. התוחלת  $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3)$  היא: (א) 1 (ב)  $\frac{2}{3}$  (ג) 2

6. ההסתברות  $\mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 = 1)$  היא: (א)  $\frac{1}{3}$  (ב)  $\frac{1}{4}$  (ג)  $\frac{1}{12}$

7. השונות  $\mathbb{V}(X_1 + X_2 + X_3)$  היא:

(א)  $\frac{11}{12}$  (ב) 1 (ג)  $\frac{5}{4}$

8. השונות המשותפת  $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$  היא:

(א)  $\frac{1}{12}$  (ב)  $\frac{1}{4}$  (ג)  $\frac{1}{3}$

9. הקירוב הלינארי האופטימלי של  $Y_2$  בהנתן  $Y_1$  הוא:

(א)  $\frac{1}{3}Y_1 + \frac{3}{2}$  (ב)  $\frac{4}{3}Y_1$  (ג)  $\frac{4}{3}Y_1 - 2$

### סוגיה 3

נתונה סידרה של כדים המכילים כדורים המסומנים ב- (+1) או (-1). בכד ה- $i$  יש כדור אחד המסומן ב- (-1) ו- $i$  כדורים המסומנים ב- (+1). מוצאים מכל כד באקראי כדור אחד באופן שהוצאות הן בלתי תלויות זו בזו. יהי  $X_i$  הסימון של הכדור שהוצא מהכד ה- $i$ .

10. התוחלת של הכפל  $X_1 X_2 \dots X_{10}$  היא:

(א)  $\frac{1}{10!}$  (ב) 0 (ג)  $\frac{1}{55}$

11. התוחלת של הכפל  $X_{11} X_{12} \dots X_{20}$  היא:

(א)  $\frac{11}{42}$  (ב)  $\frac{10!}{20!}$  (ג)  $\frac{10}{21}$

12. ההסתברות שיש מספר אי-זוגי של כדורים (-1) בין  $X_1, \dots, X_{10}$  היא:

(א)  $\frac{27}{55}$  (ב)  $\frac{1}{10!}$  (ג)  $\frac{1}{10}$

13. ההסתברות שיש מספר אי-זוגי של כדורים (-1) בין  $X_{11}, \dots, X_{20}$  היא:

(א)  $\frac{53}{84}$  (ב)  $\frac{31}{84}$  (ג)  $\frac{11}{42}$

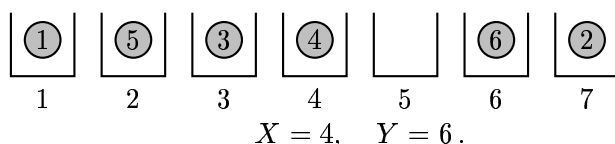
14. נסמן ב- $p$  את ההסתברות שיש לפחות כדור אחד מסומן ב- (-1) בין  $X_{11}, \dots, X_{20}$ .

(א)  $p = \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{21}$  (ב)  $p \geq \frac{31}{84}$  (ג)  $p \leq \frac{11}{42}$

#### סוגיה 4

מפזרים  $n$  כדורים ב- $m$  תאים,  $m \geq n$ , לא יותר מכדור אחד בתא אחד. הכדורים מסומנים במספרים מ-1 עד  $n$ , והתאים מסומנים במספרים מ-1 עד  $m$ . הכדור ה- $i$  ייקרא "במקומו" אם הוא הוכנס לתא ה- $i$ . נסמן ב- $X$  את מספר הכדורים שבמקומם, וב- $Y$  את מספר זוגות הכדורים ששניהם במקומם.

דוגמה:  $n = 6, m = 7$



15. עבור  $n = 4, m = 5$ , ההסתברות  $\mathbb{P}(X = 0)$  היא: (א)  $\frac{53}{120}$  (ב)  $\frac{11}{30}$  (ג)  $\frac{3}{8}$

16. עבור  $n = 4, m = 5$ , ההסתברות  $\mathbb{P}(X = 1)$  היא: (א)  $\frac{3}{8}$  (ב)  $\frac{53}{120}$  (ג)  $\frac{11}{30}$

17. עבור  $m = n$ , הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = 0)$  הוא: (א)  $\frac{1}{e}$  (ב)  $\frac{1}{e-1}$  (ג)  $\frac{e-1}{e}$

18. עבור  $m \geq n$  כלשהם, התוחלת  $\mathbb{E}(X)$  היא: (א)  $\frac{m!}{n!(m-n)!}$  (ב)  $\frac{m}{n}$  (ג) 1

19. עבור  $m = n = 5$ , התוחלת  $\mathbb{E}(Y)$  היא: (א)  $\frac{1}{2}$  (ב) 1 (ג) 2

20. עבור  $m = n = 5$ , השונות  $\mathbb{V}(X)$  היא: (א)  $\frac{1}{2}$  (ב) 1 (ג) 2

רמז:  $Y = \frac{X(X-1)}{2}$ ; תשתמש ב-18 ו-19.

## רשימת נוסחאות

$\mathbb{V}(X)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{P}(X = k)$	ההתפלגות	
$np(1-p)$	$np$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1-p}{p}$	$p(1-p)^k$	$G(p)$	גיאומטרית המתחילה ב-0
$n \frac{1-p}{p^2}$	$n \frac{1-p}{p}$	$\binom{k+n-1}{n-1} p^n (1-p)^k$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית המתחילה ב-0
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(Y|X)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\hat{Y} \approx \rho \hat{X}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \pm \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$