## סמסטר א', מועד ב', תשע"א, 11.3.2011

## בחינה ב"מבוא להסתברות" (המרצה: דר' רון פלד)

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון.

השאלון מורכב מ- 20 שאלות. כל תשובה נכונה מזכה ב- 6+ נקודות וכל תשובה לא נכונה מזכה ב- (-2) נקודות. מותר לסמן יותר מתשובה אחת לשאלה. אם צברת S נקודות, ציונך max(min(S,100),0).

יש לרשום את התשובות הסופיות לשאלות בטבלאות הבאות (מחברת הבחינה ושאר הדפים בטופס המבחן משמשים לטיוטא בלבד ולא ייבדקו).

בהצלחה!!!

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| א | | | | | | |
| ב | | | | | | |
| ג | | | | | | |
| ד | | | | | | |

| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| א | | | | | | | |
| ב | | | | | | | |
| ג | | | | | | | |
| ד | | | | | | | |

| | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| א | | | | | |
| ב | | | | | |
| ג | | | | | |
| ד | | | | | |

| | 19 | 20 |
|---|---|---|
| א | | |
| ב | | |
| ג | | |
| ד | | |

## סוגיה ראשונה

לדני יש 16 מטבעות ממוספרים מ-1 עד 16. המספר של כל מטבע רשום עליו בצידו האחד ובצידו השני של כל מטבע רשומה האות "X" (ומספר המטבע אינו מופיע). דני מסדר את המטבעות על השולחן בשורה בסדר עולה, כאשר כל המספרים גלויים לעין.

בשלב "1", דני הופך כל מטבע בסיכוי חצי באופן בלתי תלוי בין המטבעות. יהי $Y_1$ מספר ה"X"יים הנגלים לעין לאחר שלב זה.

בשלב "2", שוב הופך דני כל מטבע בסיכוי חצי באופן בלתי תלוי בין המטבעות ובשלב הקודם. יהי $Y_2$ מספר ה"X"יים הנגלים לעין לאחר שלב זה.

באותו אופן מוגדרים שלב j ו- $Y_j$ לכל $j=1,2,\ldots,100$ (כלומר, בשלב $j$ דני הופך כל מטבע בסיכוי חצי באופן בלתי תלוי בין המטבעות ובשלבים הקודמים. $Y_j$ הוא מספר ה"X"יים הנגלים לעין לאחר שלב j).

1. מהי תוחלת סכום המספרים מיד לאחר שלב "1"?

$$\frac{1+2+\cdots+16}{2}$$

א. 34
ב. 68
ג. 136
ד. 272

2. מהי שונות כמות הפעמים שדני רואה את הספרה "1" מיד לאחר שלב "1"? (שימו לב, למשל, כי על המטבע עם המספר 10 מופיעות הספרות "1" ו-"0". לדוגמא, אם דני רואה רק את המטבעות עם המספרים 1,4,11,15 אז מספר הפעמים שהוא רואה את הספרה "1" הוא 4).

יש 7 מטבעות שבהם 1 מופיע פעם אחת. במטבע 11 יש שני 1, Z - מספר ה 1 שבעין רואה.

$$Z=Z_1+Z_{10}+Z_{12}+Z_{13}+Z_{14}+Z_{15}+Z_{16}+Z_{11}$$

$$V(Z)=7V(Z_1)+V(Z_{11})=$$

$$=7\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

ד׳ זה לכן

א. 9/2
ב. 8/4
ג. 9/4
ד. 11/4

3. מהי תוחלת סכום המספרים מיד לאחר שלב "2"?

סכום המספרים אחרי שלב "2" הוא בעל אותה התפלגות כמו אחרי שלב "1".

א. 34
ב. 68
ג. 136
ד. 272

4. חשב את הסיכוי ש $Y_5 = 7$.

$$Y_5 \sim B\left(16, \frac{1}{2}\right)$$

א. $1-2^{-5}$

ב. $\dfrac{\binom{8}{7}\binom{8}{1}}{\binom{16}{8}}$

ג. $e^{-2}\dfrac{2^7}{7!}$

ד. $\binom{16}{7}2^{-16}$

5. מקדם המתאם $\rho(Y_5,Y_6)$ מקיים

הם ב"ת כי בכל פעם מטילים מחדש את המטבעות. משתנים ב"ת הם גם בלתי מתואמים.

א. $-1 \le \rho(Y_5,Y_6) < 0$

ב. $\rho(Y_5,Y_6) = 0$

ג. $0 < \rho(Y_5,Y_6) < 1$

ד. $\rho(Y_5,Y_6) = 1$

6. חשבו בקירוב את ההסתברות $P\left(7.8 \le \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} Y_i \le 8.1\right)$

$$\forall i: E(Y_i) = \frac{16}{2} = 8 \qquad V(Y_i) = 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$\sqrt{V\left(\frac{1}{100}\sum Y_i\right)} \underset{\text{אי תלות}}{=} \sqrt{\frac{100 \cdot 4}{100^2}} = 0.2$$

$$\phi\left(\frac{8.1-8}{0.2}\right) - \phi\left(\frac{7.8-8}{0.2}\right) \text{ ובמקרב}$$

א. $\phi(0.5)-\phi(-1)$

ב. $\phi(1)-\frac{1}{2}$

ג. $\phi(2)-\phi(-1)$

ד. $e^{-800}\dfrac{800^{810}}{810!} - e^{-800}\dfrac{800^{780}}{780!}$

## סוגיה שניה

יוסי מטיל מטבע הוגן עד הפעם הראשונה שמתקבל עץ ומסמן את כמות החטלות ב- X. לאחר מכן מטיל יוסי X מטבעות הוגנים, כל אחד עד אשר מתקבל עץ, ומסמן ב- $Y_i$ את כמות החטלות של המטבע ה- i (כאשר $i=1,2,3,\dots,X$). יוסי מסמן גם $S=Y_1+Y_2+\dots+Y_X$, כלומר S הוא כמות החטלות הכוללת של X המטבעות.

$$Y_1 \sim G\left(\frac{1}{2}\right)$$

7. מהי תוחלת $Y_1$?
   - א. 1/4
   - ב. 1/2
   - ג. 1
   - ד. 2

8. בהנתן ש- X=7, לאיזו משפחת התפלגויות משתייך S?
   - א. בינומית
   - ב. גיאומטרית
   - ג. בינומית שלילית
   - ד. אף אחת מהתשובות הקודמות

זהו סכום של שבעה ג'אומטרים ב"ת.

$$P(S=k)=\sum_{x=1}^{k}P(X=x)P(S=k|X=x)=$$

$$=\sum_{x=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\binom{k-1}{x-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\sum_{x=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\binom{k-1}{x-1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{l}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{4}$$

9. לאיזו משפחת התפלגויות משתייך S?
   - א. בינומית
   - ב. גיאומטרית
   - ג. בינומית שלילית
   - ד. אף אחת מהתשובות הקודמות

10. מהי תוחלת S?
    - א. 1/2
    - ב. 1
    - ג. 2
    - ד. 4

$$E(S)=E_X(S|X)=E(2X)=4$$

11. מהי $E(SX)$?
    - א. 3/2
    - ב. 4
    - ג. 8
    - ד. 12

$$E(SX)=E_X(SX|X)=E(2X\cdot X)=$$

$$=E(2X^2)=2\cdot E(X^2)=2\left(V(X)+E^2(X)\right)=$$

$$=2\left(\frac{0.5}{0.5^2}+2^2\right)=12$$

12. מהי השונות של S?

$$V(S)=E_X(V(S|X))+V_X(E(S|X))=$$
$$=E\left(X\cdot\frac{0.5}{0.5^2}\right)+V(2X)=2\cdot E(X)+4V(X)=$$
$$=2\cdot 2+4\cdot\frac{0.5}{0.5^2}$$

א. 10
ב. 12
ג. 14
ד. 16

13. מהו $cov(S,Y_1)$?

$$Cov(S,Y_1)=Cov\left(\left(Y_1+\sum_{i\geq 2}Y_i\right),Y_1\right)=$$
$$=Cov(Y_1,Y_1)=V(Y_1)=\frac{0.5}{0.5^2}=2$$

א. 2
ב. 4
ג. 6
ד. 10

## סוגייה שלישית

בקרית אביב נוהגים התושבים לשחק בקוביה הוגנת לה חמש פאות, הממוספרות 1,2,3,4,5. אם מטילים קובייה כזו הסיכוי לכל אחת מהתוצאות הוא 1/5.

14. משה מטיל את הקובייה (לה חמש פאות) שוב ושוב. הסיכוי שהתוצאה 2 או 4 תתקבל לפני התוצאה 5 היא:

תוצאה ראשונה שהגיע לקבוצה {2,4,5} הגיע לקבוצה {2,4} בסיכוי

$$\frac{0.2+0.2}{0.2+0.2+0.2}$$

או

a - הסיכוי המבוקש. נתנה בתוצאות ההטלה הראשונה:

$$a=\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot 1+\frac{2}{5}\cdot a$$

א. 1/5
ב. 2/5
ג. 1/3
ד. 2/3

משחק המזל הבא מאד מקובל בקרית אביב: מתבצעת סדרת הטלות בלתי תלויות של קוביה הוגנת (בעלת חמש פאות). השחקן יכול להפסיק את המשחק לאחר כל הטלה, ולקבל מספר שקלים השווה לתוצאת אותה הטלה. כך, למשל, אם תוצאת ההטלה היא 5 והוא עוצר את המשחק, הוא מקבל חמישה שקלים. המשחק מסתיים בכל מקרה כאשר תוצאת ההטלה היא 1, ובמקרה זה השחקן מקבל שקל אחד.

15. אהרון משתמש באסטרטגיית המשחק הבאה: אם תוצאת ההטלה היא 2 או 3—המשך לשחק. אם תוצאת ההטלה היא 4 או 5—הפסק לשחק. תוחלת הפרס של אהרון היא:

אם 4 או 5 יופיעו לפני 1 אז תוחלת הרווח של אהרון תהיה $\frac{4+5}{2}$ אחרת הוא יקבל בדיוק שקל אחד.

התוחלת היא

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4+5}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{10}{3}$$

א. 3
ב. 10/3
ג. 4

ד. אף תשובה אינה נכונה

16. יתרו משתמש באסטרטגיית המשחק הבאה: אם תוצאת ההטלה היא 2—המשך לשחק. אם תוצאת ההטלה היא 3, 4 או 5—הפסק לשחק.

תוחלת הרווח של יתרו היא

$\frac{3}{4}\cdot\frac{3+4+5}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1=3\frac{1}{4}$

א. תוחלת הפרס של אהרון שווה לתוחלת הפרס של יתרו
ב. תוחלת הפרס של אהרון גבוהה מתוחלת הפרס של יתרו
ג. תוחלת הפרס של אהרון נמוכה מתוחלת הפרס של יתרו
ד. אין די נתונים כדי לענות על השאלה

(אפשר גם לשכנע ללא חישוב שתוחלת הרווח של יתרו נמוכה מזו של אהרון).

17. עבור כל הטלה על השחקן לשלם שקל אחד. תוחלת הרווח (גובה הפרס פחות התשלום עבור הטלות הקוביות) של יתרו שווה ל:

מספר המשחקים שיתרו ישחק מתפלג $G\left(\frac{4}{5}\right)$ ולכן לו תוחלת $\frac{5}{4}$. תוחלת ההפרש בין הפרס לתשלום היא

$3\frac{1}{4}-\frac{5}{4}=2$ !

א. 1
ב. 2
ג. 4/9
ד. אף תשובה אינה נכונה

18. בהתייחס לרווח (גובה הפרס פחות התשלום עבור הטלות הקוביות) של אהרון ויתרו, מה מהבאים נכון?

א. תוחלת הרווח של אהרון שווה לתוחלת הפרס של יתרו
ב. תוחלת הרווח של אהרון גבוהה מתוחלת הפרס של יתרו
ג. תוחלת הרווח של אהרון נמוכה מתוחלת הפרס של יתרו
ד. אין די נתונים כדי לענות על השאלה

כעת תוחלת הרווח של אהרון היא

$3\frac{1}{3}-\frac{1}{\frac{3}{5}}<2$

## <u>שאלות שאינן חלק מסוגיה:</u>

נתונות שלוש הטענות הבאות לגבי זוג מאורעות A ו- B :

(i) $P(AUB) = 1$ (כלומר, ההסתברות של A איחוד B היא 1).

(ii) $P(A) = P(B)$

(iii) $cov(1_A,1_B) \geq 0$

19. אילו טענות מספיקות כדי להסיק ש- $P(A) \geq 1/2$? $1 \overset{i}{=} P(A\cup B) \leq P(A)+P(B) \overset{ii}{=} 2P(A)$
    א. טענה (i) לבדה מספיקה
    ב. טענות (i) ו- (ii) ביחד מספיקות, אך כל אחת מהן לחוד אינה מספיקה
    ג. טענות (i), (ii) ו- (iii) ביחד מספיקות, אך אף שתיים מהן לחוד אינן מספיקות
    ד. אף תשובה אינה נכונה

תנאי הראשון לא מספיק אם לדוגמא $P(B)=1$
$P(A)=0$

20. אילו טענות מספיקות כדי להסיק ש- $P(A) = 1$?
    א. טענה (i) לבדה מספיקה
    ב. טענות (i) ו- (ii) ביחד מספיקות, אך כל אחת מהן לחוד אינה מספיקה
    ג. טענות (i), (ii) ו- (iii) ביחד מספיקות, אך אף שתיים מהן לחוד אינן מספיקות
    ד. אף תשובה אינה נכונה

א/כ $P(A\cup B)=1$ אז $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0$

נניח בשלילה ש $P(\bar{A}),P(\bar{B}) \geq 0$

אז $Cov(1_{\bar{A}},1_{\bar{B}}) = E(1_{\bar{A}},1_{\bar{B}}) - E(1_{\bar{A}})\cdot E(1_{\bar{B}})$

$< 0$

אך

$Cov(1_{\bar{A}},1_{\bar{B}}) = Cov(1-1_{\bar{A}},1-1_{\bar{B}}) =$

$= (-1)^2\cdot Cov(1_A,1_B) \geq 0$

וקיבלנו סתירה.

# רשימת נוסחאות

| Var(X) | E(X) | P(X=k) | ההתפלגות | |
|---|---|---|---|---|
| np(1-p) | np | $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ | Bin(n,p) | בינומית |
| λ | λ | $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ | Poisson(λ) | פואסון |
| $\frac{1-p}{p^2}$ | $\frac{1}{p}$ | $p(1-p)^{k-1}$ | Geom(p) | גיאומטרית |
| $\frac{n^2-1}{12}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{1}{n}$ | Unif({1,2,...,n}) | אחידה על {1,2,...,n} |
| $n\frac{1-p}{p^2}$ | $\frac{n}{p}$ | $\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ | NB(n,p) | בינומית-שלילית |
| $n\frac{G}{N}\left(1-\frac{G}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$ | $n\frac{G}{N}$ | $\frac{\binom{G}{k}\binom{N-G}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ | Hg(N,G,n) | היפרגיאומטרית |

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \quad (-\infty<x<\infty)$$

$$E(X) = E(E(X \mid Y))$$

$$Var(X) = E(Var(X \mid Y)) + Var(E(X \mid Y))$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-E(X))+E(Y)$$

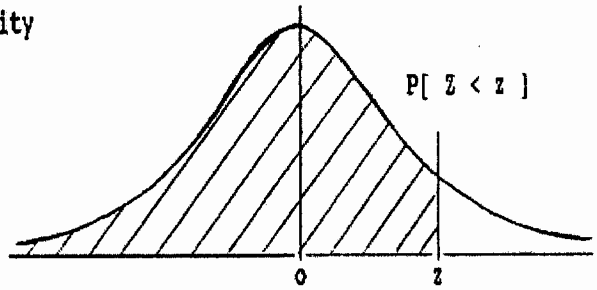
| λ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-\lambda}$ | 0.905 | 0.819 | 0.741 | 0.670 | 0.607 | 0.549 | 0.497 | 0.449 | 0.407 |
| λ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $e^{-\lambda}$ | 0.368 | 0.135 | 0.0498 | 0.0183 | 0.0067 | 0.0025 | 0.0009 | 0.0003 | 0.0001 |

# STANDARD STATISTICAL TABLES

## 1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z
i.e.

$$P[\ Z < z\ ] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2}Z^2)\ dZ$$




| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5159 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7854 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8804 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9773 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9865 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9874 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9924 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |

| z | 3.00 | 3.10 | 3.20 | 3.30 | 3.40 | 3.50 | 3.60 | 3.70 | 3.80 | 3.90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 0.9986 | 0.9990 | 0.9993 | 0.9995 | 0.9997 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 1.0000 |