

סמסטר א', מועד ב', תשס"ה  
תאריך הבחינה: 11.03.2005  
מספר קורס: 0365-1102

מס' מחברת: \_\_\_\_\_  
מס' ת.ז.: \_\_\_\_\_

## בחינה במבוא להסתברות

המרצים: פרופ' דוד גילת, פרופ' אהוד לרר

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר: מותר להשתמש בדף סיכום אישי. מחשב כיס מותר – אך מיותר.

**הוראות ושיטת הניקוד:** השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. לכל שאלה ניתנות 4 תשובות, שאחת ורק אחת מהן נכונה. סימון התשובה הנכונה בצורה ברורה בטבלת התשובות המופיעה בעמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה שגויה נושא 2 נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה. אי סימון אף אחת מהתשובות יחשב כהצהרה "איני יודע", ונקודות זכות אחת תינתן במקרה זה. טווח הנקודות האפשרי הוא -108 עד 108, והציון של נבחן הצובר  $N$  נקודות יהיה  $\max\{0, \min\{N, 100\}\}$ . לעזרתך מצורפת בסוף טופס הבחינה טבלת שטחים מתחת לעקום הנורמלי.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5
א					
ב					
ג					
ד					

	6	7	8	9
א				
ב				
ג				
ד				

	10	11	12	13
א				
ב				
ג				
ד				

	14	15	16	17	18
א					
ב					
ג					
ד					

לשימוש הבודק:

תשובות נכונות	תשובות שגויות	תשובות "איני יודע"	ציון סופי

## סוגיה 1

יהיו  $X, Y, Z$  משתנים מקריים בלתי-תלויים בעלי ערכים שלמים בלבד. ההתפלגות של  $Z$  נתונה על ידי  $P(Z=0) = P(Z=1) = \frac{1}{2}$ . כמו כן נגדיר  $W = ZX + (1-Z)Y$ .

1. ההסתברות שהסכום  $X + Y + Z$  הוא זוגי גדולה מ- $\frac{1}{2}$  כשהסתברות המאורע "הסכום  $X + Y$  הוא זוגי" גדולה מ- $\frac{1}{2}$ .
- א. תמיד שווה ל- $\frac{1}{2}$ .  
 ב. שווה ל- $\frac{1}{2}$  רק כאשר  $X$  ו- $Y$  שויי התפלגות.  
 ג. תמיד שווה ל- $\frac{1}{2}$ .  
 ד. דרושה אינפורמציה נוספת על התפלגות  $X$  ו- $Y$  כדי להכריע.

2. אם  $P(X=1) = \frac{1}{3}$ , אז  $P(W=1)$

- א. בדיוק  $\frac{1}{3}$ .  
 ב. לפחות  $\frac{1}{6}$ .  
 ג. לכל היותר  $\frac{1}{6}$ .  
 ד. בדיוק  $\frac{1}{6}$ .

3. נניח ש- $X$  ו- $Y$  בעלי שונות סופיות, ונתבונן בשווייונים:

$$(i) \quad E(W) = E\left(\frac{X+Y}{2}\right)$$

$$(ii) \quad Var(W) = \frac{1}{2}Var(X+Y) + \left(E\left(\frac{X-Y}{2}\right)\right)^2$$

- א. שניהם נכונים.  
 ב. רק (i) נכון.  
 ג. רק (ii) נכון.  
 ד. שניהם לא נכונים.

4. התוחלת המותנה  $E(W|Z)$  שווה ל-

- א.  $\frac{1}{2}(E(X) + E(Y))$ .  
 ב.  $ZE(X) + (1-Z)E(Y)$ .  
 ג.  $E(W)$ .  
 ד. אף אחת מהתשובות.

5. השונות המשותפת  $cov(X, W)$  שווה ל-

- א.  $cov(Z, X)$ .  
 ב.  $\frac{1}{2}(Var(X) + Var(Y))$ .  
 ג.  $cov(Z, X+Y)$ .  
 ד.  $\frac{1}{2}Var(X)$ .

## סוגיה 2

$n$  קוביות הוגנות מפוזרות באקראי ב- $n$  תאים הממוספרים מ-1 ועד  $n$ , כך שכל  $n^n$  הפיזורים האפשריים שווים סיכוי. בכל תא מטילים פעם אחת את כל הקוביות שנמצאות בו. נגדיר:

$X_i$ , מספר הקוביות שנמצאות בתא  $i$ .

$S_i$ , סכום תוצאות הקוביות שהוטלו בתא  $i$ .

6. התוחלת  $E(S_i)$  שווה ל-

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| <p>א. לא ניתן לחשב את <math>E(S_i)</math>, כי מספר הקוביות בתא <math>i</math> הוא משתנה מקרי</p> | <p>ב. <math>\frac{7}{3}</math></p> |
| <p>ג. <math>\frac{8}{3}</math></p>   | <p>ד. <math>\frac{7}{2}</math></p> |

7. השונות המשותפת  $\text{cov}(X_i, S_i)$  שווה ל-

- |   |   |
|---|---|
| <p>א. <math>\frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right)</math></p> | <p>ב. <math>\frac{7}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)</math></p> |
| <p>ג. <math>\frac{49}{4}</math></p>                             | <p>ד. <math>3n \left(1 - \frac{1}{n}\right)</math></p>          |

רמז:  $\text{cov}(X_i, S_i) = \text{cov}(X_i, E(S_i | X_i))$

8. תא  $i$  נקרא "מיוחד" אם  $S_i = 2$ . ההסתברות שתא  $i$  מיוחד שווה ל-

- |   |   |
|---|---|
| <p>א. <math>\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}</math></p>                             | <p>ב. <math>\frac{1}{36} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n</math></p>      |
| <p>ג. <math>\binom{n}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}</math></p> | <p>ד. <math>\frac{13}{72} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}</math></p> |

9. מקדם המתאם  $\rho(X_1, X_2 + \dots + X_n)$  שווה ל-

- |   |  |
|---|--|
| <p>א. <math>\frac{1}{n} - 1</math></p>      | <p>ב. <math>-n \left(\frac{1}{n} - 1\right)</math></p> |
| <p>ג. <math>1 - \frac{1}{n(n-1)}</math></p> | <p>ד. אף אחת מהתשובות</p>                              |

### סוגיה 3

ההתפלגות המשותפת של  $X$  ו- $Y$  נתונה בטבלה הבאה:

$X \setminus Y$	2	4
0	$a$	$\frac{1}{2} - a$
1	$\frac{1}{2} - a$	$a$

כאשר  $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ . נגדיר שתי פונקציות  $e_0(a) = E(Y | X = 0)$ ,  $e_1(a) = E(Y | X = 1)$ .

10. הפונקציה  $e_0(a)$  היא

- א. פונקציה לינארית יורדת של  $a$   
 ב. פונקציה לינארית עולה של  $a$   
 ג. לא תלויה ב- $a$  (קבועה)  
 ד. לא פונקציה לינארית של  $a$

11.  $e_0(a) \leq e_1(a)$

- א. לכל  $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$   
 ב. רק עבור  $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$   
 ג. רק עבור  $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$   
 ד. לכל  $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$   $e_0(a) > e_1(a)$

12.  $X$  ו- $Y$  בלתי-מתואמים

- א. לכל  $a$   
 ב. עבור אף ערך של  $a$   
 ג. לכל  $\frac{1}{6} \leq a \leq \frac{1}{3}$   
 ד. רק עבור  $a = \frac{1}{4}$

13.  $X$  ו- $Y$  בלתי-תלויים

- א. לכל  $a$   
 ב. עבור אף ערך של  $a$   
 ג. לכל  $\frac{1}{6} \leq a \leq \frac{1}{3}$   
 ד. רק עבור  $a = \frac{1}{4}$

## סוגיה 4

בכד יש שני מטבעות: למטבע א' יש שני ראשים, ולמטבע ב' יש ראש וזנב (עם הסתברות זהה לשניהם). מושכים מטבע באקראי מהכד ומטילים אותו פעם אחת. אם מתקבל זנב – מטילים את אותו המטבע  $n$  פעמים נוספות. אם מתקבל ראש – מחליפים מטבע ואותו מטילים  $n$  פעמים. הערה: בכל מקרה מבצעים בדיוק  $n+1$  הטלות.

יהי  $Y$  מספר הראשים ב- $n+1$  ההטלות. לכל  $i=1, \dots, n+1$ , יהי  $X_i$  האינדיקטור למאורע "ראש בהטלה  $i$ ", כלומר:  $X_i = 1$  אם התקבל ראש בהטלה  $i$ , ו- $X_i = 0$  אחרת.

14. סמן את התשובה הנכונה

- א.  $Y - X_1$  הוא משתנה מקרי בינומי  
 ב.  $Y$  הוא משתנה מקרי בינומי  
 ג.  $Y = \frac{1}{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2$ , כאשר  $Z_1$  ו- $Z_2$  הם משתנים מקריים בינומיים בלתי-תלויים  
 ד. אף אחת מהתשובות

15.  $E\left(\frac{1}{Y+1} \mid X_1 = 0\right)$  שווה ל-

- א.  $\frac{1}{(n/2)+1}$   
 ב.  $\frac{1}{(n/2)-1}$   
 ג.  $\frac{2-(1/2)^n}{n+1}$   
 ד.  $\frac{1-(1/2)^n}{(n/2)+1}$

16. יהי  $M$  מספר ההטלה הראשונה שבה מתקבל ראש.  $E(M \mid Y=1, X_1=0)$  שווה ל-

- א.  $\frac{n}{3}$   
 ב.  $\frac{n}{2}$   
 ג.  $\frac{n+3}{2}$   
 ד. אף אחת מהתשובות

17. המשתנים המקריים  $X_2$  ו- $X_3$  הם

- א. בלתי-תלויים  
 ב. מתואמים  
 ג. בלתי-תלויים אם  $X_1 = 1$ , ותלויים אם  $X_1 = 0$   
 ד. אין מספיק נתונים על מנת לענות על השאלה

18.  $P(X_1 + X_2 = 2)$  שווה ל-

- א.  $\frac{1}{4}$   
 ב.  $\frac{1}{2}$   
 ג.  $\frac{5}{8}$   
 ד.  $\frac{3}{8}$