

מבחן במבוא להסתברות

לתלמידי מתימטיקה שנה א'

המורים: ד"ר ליברמן, ד"ר אהרוןסון

- בכחינה ארבעה פרקים. לכל פרק משקל שווה.
- יש לענות על חמש שאלות כמפורט בגוף הבחינה.
- ... להשתמש בחומר עזר.
- משך הבחינה: 3 שעות.

פרק א': ענה על השאלה הבאה.

- הטלת מטבע שבה הסיכוי ל-"ע" הוא  $p$  אתה זוכה ב- $a$  שקלים אם יצא "ע" ומשלם  $b$  שקלים אם יצא "ת". יהי  $S_n$  הרווח שלך לאחר  $n$  הטלות.
- (א) מצא את חוק ההתפלגות של  $S_n$ .
- (ב) חשב  $E(S_n)$  ואת  $V(S_n)$ .

פרק ב': ענה על השאלה הבאה.

- הם מ"מ שרזי התפלגות בעלת תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ , שמקדם המתאם בין כל שניים מהם קבוע, כלומר
- (א) הראה כי מקדם המתאם בין  $X_1 + X_2$  לבין  $-X_3 + X_4$  שווה ל- $\frac{2\sigma^2}{1+\sigma^2}$ .
- (ב) הוכח כי  $-\frac{1}{3} \leq \rho \leq 1$ .

ג' : ענה על השאלה הבאה.

מספר החלקיקים  $N$  שפולט מקור רדיואקטיבי ביחידת זמן מפורק פואסונית עם פרמטר  $\lambda$ .  
יד המקור מוצב מונה גייגר המגלה כל חלקיק בסיכוי קבוע  $p$  באופן בלתי תלוי בין  
וליק לחלקיק. יהי  $M$  מספר החלקיקים שמונה הגייגר מגלה ביחידת זמן.

אם ידוע כי נפלטו  $n$  חלקיקים מצא את ההסתברות שנתגלו  $k$  חלקיקים,  
כלומר מצא את ההסתברות המותנה,

$$P(M=k | N=n)$$

הראה כי ההסתברות שנתגלו  $k$  חלקיקים הינה

$$P(M=k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \quad k=0,1,2,\dots$$

אם ידוע שנתגלו  $k$  חלקיקים, מהי ההסתברות שנפלטו על ידי המקור  $n$  חלקיקים? הסבר!

פרק ד' : ענה על שתיים משלוש השאלות הבאות:

1.  $n$  כדורים שונים מוכנסים ל-  $n$  תאים שונים באופן מקרי. מהי ההסתברות לכך  
שבדיוק תא אחד נשאר ריק? הסבר!

2. שבעה ספרים  $A, B, C, D, E, F, G$  מסודרים באופן מקרי על מדף.  
מה ההסתברות שהספרים  $A$  ו-  $B$  יעמדו זה ליד זה אך  $C$  אינו עומד  
ליד אף אחד מהם? פרט!

3. משתתפים בסדרת משחקים בלתי זלויים הנערכים  
בזה אחר זה שבהם יש לכל אחד מהם סיכוי שווה לנצח. הראשון שזוכה בשלושה  
משחקים, לאו דוקא רצופים, זוכה בסדרה. ידוע כי  $A$  יכה במשחק הראשון  
והשלישי ו-  $B$  בשני. מהי ההסתברות לכך ש-  $C$  יזכה בסדרה? הסבר!

בהצלחה!!!