

סמסטר א', מועד א', תשע"ה, 11.2.2015

בחינה ב"מבוא להסתברות" (המרצה: פרופ' רון פלד)

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון ללא יכולות תכנות, ציור גרפים או תקשורת.

השאלון מורכב משאלה פתוחה ומשאלות רבות ברירה.

יש לסמן את התשובות לשאלות רבות הברירה בטופס המצורף בלבד!

תשובה שגויה לשאלה רבת ברירה אינה מפחיתה ניקוד.

מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה רבת ברירה.

סה"כ ישנן 110 נקודות במבחן. אם צברת S נקודות, ציונך $\min(S, 100)$.

בהצלחה!!!

חלק א' – שאלה פתוחה – 26 נקודות

יהי $n \geq 2$ שלם. פרמוטציה על n איברים היא העתקה חד-חד-ערכית ועל מקבוצת המספרים $\{1, \dots, n\}$ לעצמה. תהי σ פרמוטציה על n איברים שנבחרה אחיד מבין כל האפשרויות. נגדיר $I = |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}|$, כלומר, I סופר את כמות הזוגות $i < j$ עבורם $\sigma(i) > \sigma(j)$.

(א) (4 נק') חשבו את $E(I)$.

(ב) (6 נק') חשבו את $\text{Var}(I)$.

(ג) (8 נק') הוכיחו כי לכל $\epsilon > 0$ מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|I - \frac{n^2}{4}\right| > n^{\frac{3}{2} + \epsilon}\right) = 0$

(ד) (8 נק') נקבע $2 \leq j \leq n$. נגדיר את המשתנה המקרי

$I_j = |\{i : 1 \leq i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}|$, כלומר, I_j סופר את כמות ה- i הקטנים מ- j

עבורם $\sigma(i) > \sigma(j)$. הוכיחו כי לכל $0 \leq m \leq j - 1$ מתקיים $P(I_j = m) = \frac{1}{j}$.

חלק ב' – שאלות רבות ברירה – 7 נקודות לשאלה (סה"כ 84 נקודות)

סוגיה ראשונה

יהי $n \geq 3$ שלם ויהי N משתנה מקרי המפולג $\text{Bin}(2n, 1/2)$. ליוסי N משימות ו- n עובדים. יוסי מטיל כל משימה על עובד הנבחר אחיד מ- n העובדים, באופן בלתי תלוי בין המשימות. נסמן ב- X_i עבור $1 \leq i \leq n$ את כמות המשימות שהוטלו על העובד ה- i .

(1) מהי ההתפלגות של $X_1 + X_2 + X_3$?

- (א) בינומית
- (ב) היפר-גיאומטרית
- (ג) אחידה
- (ד) אף אחת מהנ"ל

(2) מהי $\text{Cov}(X_1, X_2)$?

- (א) $-\frac{2}{n}$
- (ב) $-\frac{1}{n}$
- (ג) 0
- (ד) אף אחת מהנ"ל

(3) נסמן ב- Y_n את כמות העובדים שלא קיבלו אף משימה. מה נכון לגבי הכמות $\frac{E(Y_n)}{n}$

כאשר n שואף לאינסוף?

- (א) מתכנסת ל 0
- (ב) מתכנסת ל $\Phi(-1)$
- (ג) מתכנסת ל $\frac{1}{e}$
- (ד) אף אחת מהנ"ל

- (4) נניח כעת כי $n=3k$ עבור k שלם. מה נכון לגבי הכמות $P(\sum_{i=1}^k X_i - \sum_{i=k+1}^{2k} X_i \leq \sqrt{k})$ כאשר k שואף לאינסוף?
- (א) מתכנסת ל $\Phi(\frac{1}{\sqrt{3}})$
- (ב) מתכנסת ל $\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}})$
- (ג) מתכנסת ל $\Phi(1)$
- (ד) אף אחת מהנ"ל

סוגיה שנייה

נאמר ומשתנה מקרי W מתפלג אחיד על הקבוצה $\{-1, 1\}$ אם $P(W=1) = P(W=-1) = 1/2$. יהיו משתנים מקריים X, Y, Z המקיימים שכל אחד מהמשתנים המקריים $X, Y, Z - X, Z - Y$ מתפלג אחיד על הקבוצה $\{-1, 1\}$. כמו כן, נתון ש- $X, Z - X$ משתנים מקריים בלתי תלויים וכן ש $Y, Z - Y$ משתנים מקריים בלתי תלויים.

- (5) מה ניתן לקבוע לגבי $P(Z \geq 0)$?
- (א) שווה ל- $2/3$
- (ב) שווה ל- $3/4$
- (ג) יכולה להיות כל ערך בין $2/3$ ל- $3/4$ (כולל $2/3$ ו- $3/4$)
- (ד) אף אחת מהנ"ל

- (6) האם X, Z בלתי תלויים?
- (א) בהכרח כן
- (ב) בהכרח לא
- (ג) הם בלתי תלויים אם ורק אם X, Y הם בלתי מתואמים
- (ד) אף אחת מהנ"ל

- (7) כמה איברים יש בתומך של ההתפלגות של (X, Z, Y) ?
- (א) בהכרח 4
- (ב) בהכרח 6
- (ג) 4 או 6, אבל לא שום דבר אחר.
- (ד) אף אחת מהנ"ל

- (8) מהו טווח הערכים האפשריים של $Var(X+Y)$?
- (א) 2
- (ב) 4
- (ג) כל ערך בין 2 ל-4 (כולל 2 ו-4)
- (ד) אף אחת מהנ"ל

סוגיה שלישית

אריק ובני אחים החולקים שלושה כובעים. שלושת הכובעים בצבעים לבן, שחור ואדום. בתחילת השנה לבש אריק את הכובע הלבן ובני את הכובע השחור בעוד הכובע האדום נשאר בצד. מאז, בכל יום הם בוחרים את אחד האחים באופן אחיד ואח זה מחליף בין הכובע שלבש אתמול לכובע שבצד בעוד האח השני נשאר עם הכובע שלבש אתמול.

9) נסמן ב- X_n את כמות הפעמים שלבש אריק את הכובע השחור ב- n הימים הראשונים של השנה. מה נכון לגבי הכמות $\frac{E(X_n)}{n}$ כאשר n שואף לאינסוף?

(א) מתכנסת ל $\frac{1}{6}$

(ב) מתכנסת ל $\frac{1}{3}$

(ג) אינה מתכנסת

(ד) אף אחת מהנ"ל

10) מה נכון לגבי ההסתברות שאריק לובש את הכובע האדום ובני את הכובע השחור ביום ה- n של השנה, כאשר n שואף לאינסוף?

(א) מתכנסת ל $\frac{1}{6}$

(ב) מתכנסת ל $\frac{1}{3}$

(ג) אינה מתכנסת

(ד) אף אחת מהנ"ל

בשנת 2015 יצא הכובע האדום מעט מהאופנה ועל כן החליטו אריק ובני על השיטה הבאה: בתחילת השנה לובש אריק את הכובע הלבן ובני את הכובע השחור. בכל יום לאחר מכן, אם הכובע הלבן או השחור מונח בצד, יפעלו כמו בעבר ע"י בחירת אח באופן אחיד והחלפת הכובע שלו לכובע שמונח בצד. לעומת זאת, אם הכובע האדום מונח בצד אז בסיכוי $\frac{1}{3}$ יתחלפו אריק ובני בכובעיהם מהיום הקודם, ובסיכוי $\frac{2}{3}$ יפעלו כמו בעבר, כלומר יבחרו אח באופן אחיד ויחליפו בין הכובע שלו מאתמול לכובע האדום. השאלות הבאות מתייחסות לשיטה זו.

11) מה נכון לגבי ההסתברות שבני לובש את הכובע השחור ביום ה- n של השנה, כאשר n שואף לאינסוף?

(א) מתכנסת ל $\frac{1}{6}$

(ב) מתכנסת ל $\frac{1}{3}$

(ג) אינה מתכנסת

(ד) אף אחת מהנ"ל

12) מה נכון לגבי ההסתברות שבני לובש את הכובע האדום ביום ה- n של השנה, כאשר n שואף לאינסוף?

(א) מתכנסת ל $\frac{1}{6}$

(ב) מתכנסת ל $\frac{1}{3}$

(ג) אינה מתכנסת

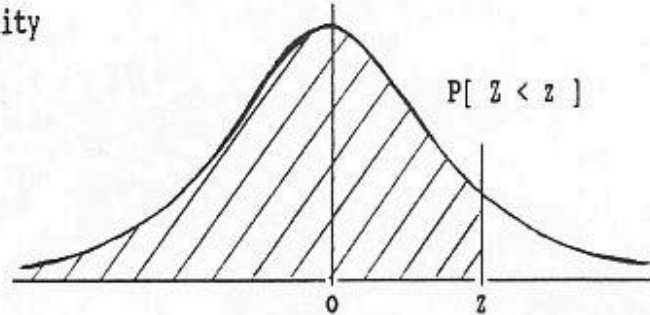
(ד) אף אחת מהנ"ל

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e.

$$P[Z < z] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2) dz$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000