

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' דוד גילת, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.

השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 5 סוגיות. ענה על כולן.

לכל שאלה ניתנות 4 תשובות שאחת ורק אחת מהן נכונה (הנימוק הנכון חשוב לא פחות מן התשובה המספרית).

סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא

נכונה נושא שתי נקודות חובה.

הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

הצובר N נקודות יקבל את הציון $\min(100, \max(N, 1))$.

לעזרתך מצורפת רשימת התפלגויות עם התוחלות והשונויות שלהן. שיסו לב שההתפלגות הגיאומטרית מתחילה

ב-0 ולא ב-1, ובהתאמה ההתפלגות הבינומית השלילית מתחילה ב-0 ולא ב- n . כללים אלה חלים בכל מקום

שההתפלגויות הנ"ל מופיעות בשאלון.

בהצלחה!

טבלת תשובות

	1	2	3
א			
ב			
ג			
ד			

	4	5	6	7
א				
ב				
ג				
ד				

	8	9	10	11
א				
ב				
ג				
ד				

	12	13	14
א			
ב			
ג			
ד			

	15	16	17	18
א				
ב				
ג				
ד				

סוגיה 1

שאלה 1. מספר המדגמים הסדורים עם החזרות בגודל 10 מתוך 100 אנשים שוה ל-

- (א) מספר הקבוצות A : $|A| = 10, A \subset \{1, \dots, 100\}$.
(ב) מספר האברים במכפלה $\{1, \dots, 10\} \times \{1, \dots, 100\}$.
(ג) מספר הפונקציות $f: \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 100\}$.
(ד) מספר הפונקציות כמו בסעיף (ג) שהן חד-חד-ערכיות.

שאלה 2. מטילים קוביה וכאשר מתקבלת הפאה n , $(n \in \{1, \dots, 6\})$, מטילים מטבע n פעמים. תהי Ω קבוצת התוצאות האפשריות (מרחב המדגם) של הניסוי. מצא את $|\Omega|$ (מספר האברים ב- Ω).

- (א) $|\Omega| = 2^6$.
(ב) $|\Omega| = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$.
(ג) $|\Omega| = 6 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$.
(ד) $|\Omega| = 2^{1+2+3+4+5+6}$.

שאלה 3. במרחב הסתברות 60 אברים (נקודות) שוי סיכוי. החלוקה α מורכבת מ-6 חלקים בני 10 אברים כל אחד. החלוקה β מורכבת מ-10 חלקים בני 6 אברים כל אחד. האם החלוקות בלתי תלויות?

- (א) כן.
(ב) לא.
(ג) יתכן שכן ויתכן שלא.
(ד) הן בלתי תלויות בזוגות, אך אין אי תלות מלאה.

סוגיה 2

9 אנשים, בהם 4 גברים ו-5 נשים, משתתפים בסדרה של משחקי מזל. בכל משחק אחד מהם מנצח בסכוי $1/9$ באופן בלתי תלוי בתוצאות המשחקים האחרים. הסדרה נמשכת עד שכל אחד מן המשתתפים מנצח לפחות פעם אחת.

שאלה 4. יהי X מספר הגברים בין שלשת המנצחים הראשונים. $E(X) = 4/3$ מפני ש-

- (א) $X \sim B(3, 4/9)$.
(ב) ההסברים ב- (א) וב- (ג) אינם נכונים; ההסבר הנכון הוא: כל אחד משלשת המנצחים הראשונים הוא גבר בהסתברות $4/9$.
(ג) ההסברים ב- (א) וב- (ב) אינם נכונים; ההסבר הנכון הוא: הסיכוי לכל אחד מהגברים לנצח באחד משלשת המשחקים הראשונים הוא $3/9$.
(ד) ההסברים ב- (ב) וב- (ג) שניהם נכונים, אבל (א) אינו נכון.

שאלה 5. תהי $V(X)$ השונות של X .

- (א) $V(X) < 1/2$.
(ב) $1/2 \leq V(X) < 2/3$.
(ג) $2/3 \leq V(X) < 5/6$.
(ד) $5/6 \leq V(X)$.

שאלה 6. יהי Y מספר הנצחונות של נשים לפני הנצחון הראשון של גבר. תהי $E(Y)$ התוחלת של Y .

- (א) $E(Y) < 1$.
(ב) $1 \leq E(Y) < 1.2$.
(ג) $1.2 \leq E(Y) < 1.4$.
(ד) $1.4 \leq E(Y)$.

שאלה 7. יהי Z מספר הנצחונות של נשים לפני הנצחון השני של גבר (שני הנצחונות האלה יכולים להיות של אותו גבר). מצא את

$$Q = \frac{E(Z)}{E(Y)}$$

- (א) $Q = 13/4$ מפני ש- $Y \sim G(4/9)$ ו- $Z \sim G((4/9)^2)$.
(ב) $Q = 2$, אבל ההסבר ב- (ג) אינו נכון; ההסבר הנכון הוא: $Y \sim NB(1, 4/9)$ ו- $Z \sim NB(2, 4/9)$.
(ג) $Q = 2$, אבל ההסבר ב- (ב) אינו נכון; ההסבר הנכון הוא: Y ו- $Z - Y$ מ"מ שוי התפלגות.
(ד) ההסברים ב- (ב) וב- (ג) שניהם נכונים.

סוגיה 3

9 לקוחות מגיעים לתחנת שרות ומסתדרים בתור באופן אקראי. 4 מן הלקוחות הם גברים ו-5 הם נשים.

שאלה 8. יהי X מספר הגברים בין שלשת הראשונים בתור. $E(X) = 4/3$ מפני ש-

(א) $X \sim B(3, 4/9)$.

(ב) ההסברים ב- (א) וב- (ג) אינם נכונים; ההסבר הנכון הוא: כל אחד משלשת הלקוחות הראשונים הוא גבר

בסיכוי $4/9$.

(ג) ההסברים ב- (א) וב- (ב) אינם נכונים; ההסבר הנכון הוא: כל גבר שיד לשלשת הראשונים בתור בהסתברות

$3/9$.

(ד) ההסברים ב- (ב) וב- (ג) שניהם נכונים, אבל (א) אינו נכון.

שאלה 9. תהי $V(X)$ השונות של X .

(א) $V(X) < 1/2$.

(ב) $1/2 \leq V(X) < 2/3$.

(ג) $2/3 \leq V(X) < 5/6$.

(ד) $5/6 \leq V(X)$.

שאלה 10. יהי Y_0 מספר הנשים לפני הגבר הראשון בתור ויהי Y_4 מספר הנשים אחרי הגבר האחרון בתור.

$E(Y_0) = E(Y_4)$ מפני ש-

(א) Y_0 ו- Y_4 בעלי התפלגות גאומטרית עם אותו פרמטר.

(ב) Y_0 ו- Y_4 שוי התפלגות, אבל ההתפלגות אינה גאומטרית.

(ג) Y_0 ו- Y_4 בעלי התפלגויות שונות, אבל יש להם הצגה דומה כסכום של אינדיקטורים.

(ד) ההסברים ב- (א), (ב) וב- (ג) אינם נכונים כי $E(Y_0) \neq E(Y_4)$.

שאלה 11. מהי התוחלת של Y_0 ?

(א) הפתרון ב- (ב) אינו נכון; הפתרון הנכון הוא:

$$E(Y_0) = \sum_{k=0}^5 k \cdot \frac{\binom{9-k}{4} - \binom{8-k}{4}}{\binom{9}{4}} \quad \left(\binom{8-5}{4} = 0 \right)$$

מפני ש- $P(Y_0 \geq k) = \binom{5}{k} / \binom{9}{k} = \frac{5!(9-k)!}{(5-k)!9!} = \binom{9-k}{4} / \binom{9}{4}$

(ב) הפתרון ב- (א) אינו נכון; הפתרון הנכון הוא: $E(Y_0) = 1$ מפני שקיימים מ"מ Y_1, Y_2, Y_3 כך ש-

$Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 5$ הם שוי התפלגות ו- Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4

(ג) הפתרונות ב- (א) וב- (ב) שניהם נכונים ונותנים אותו ערך.

(ד) הפתרונות ב- (א) וב- (ב) לא נכונים ו- $E(Y_0) > 1$ מפני שיש יותר נשים מגברים.

סוגיה 4

מטילים 3 מטבעות. 2 מן המטבעות הם סימטריים ($p = 1/2$) ו-1 מהם מוטה עם $p = 1/4$ (הסתברות של "עץ" =

"הצלחה"). בוחרים אחד משלשת המטבעות באקראי ומטילים אותו 2 פעמים.

שאלה 12. הסכוי לקבל בדיוק פעם אחת "עץ" ("הצלחה") הוא:

(א) $11/24$.

(ב) $11/48$.

(ג) $35/72$.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 13. בהנתן שהתקבל בדיוק פעם אחת "עץ", הסכוי (המותנה) שהוטל המטבע המוטה הוא:

(א) $1/3$.

(ב) $3/11$.

(ג) $8/11$.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 14. בהנתן שבשתי ההטלות הראשונות התקבל בדיוק פעם אחת "עץ", הסכוי (המותנה) שיתקבל בדיוק

פעם אחת "עץ" בשתי הטלות נוספות הוא:

(א) $35/72$.

(ב) $41/88$.

סוגיה 5

בוחרים באקראי מספר שלם מתוך $\{0, 1, \dots, 10^{100} - 1\}$. יהיו S_1, \dots, S_{100} הספרות העשרוניות של המספר שנבחר ויהי X_i ($i = 0, 1, \dots, 9$) מספר הפעמים שהספרה i מופיעה בין הספרות S_1, \dots, S_{100} .
 שאלה 15. קבע איזו מן הטענות הבאות היא הנכונה.
 א) $S_1, \dots, S_{100}, X_0, \dots, X_9$ מהווים 110 מ"מ ב"ת.
 ב) X_0, \dots, X_9 הם ב"ת ו- S_1, \dots, S_{100} אבל $X_0, \dots, X_9, S_1, \dots, S_{100}$ תלויים.
 ג) S_1, \dots, S_{100} הם ב"ת, אבל X_0, \dots, X_9 הם תלויים.
 ד) X_0, \dots, X_9 הם ב"ת באוגות, אבל אין אי תלות מלאה.

שאלה 16. קבע את הטענה הנכונה מבין הבאות:
 א) מאחר ש- $X_1 \sim B(100, 1/10)$ ו- $X_2 \sim B(100, 1/10)$ ו- X_1, X_2 ב"ת, $X_1 + X_2 \sim B(200, 1/10)$.
 ב) $X_1 + X_2$ מתפלג בינומית, אבל לא מן הסיבה ולא עם הפרמטרים שבטענה א).
 ג) $X_1 + X_2$ מתפלג בינומית שלילית.
 ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 17. קבע את הטענה הנכונה מבין הבאות:
 א) $V(X_1 + X_2) < V(X_1) + V(X_2)$.
 ב) $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ מפני ש- X_1, X_2 ב"ת.
 ג) $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ למרות ש- X_1, X_2 תלויים.
 ד) $V(X_1 + X_2) > V(X_1) + V(X_2)$.

שאלה 18. יהי R מקדם המתאם בין X_1 ו- X_2 .
 א) $-1 \leq R < -0.2$.
 ב) $-0.2 \leq R < -0.1$.
 ג) $-0.1 \leq R < +0.8$.
 ד) $0.8 \leq R \leq 1$.

רשימת התפלגויות

$V(X)$	$E(X)$	$P(X = k)$	ההתפלגות	
$np(1-p)$	np	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1-p}{p}$	$p(1-p)^k$	$G(p)$	גיאומטרית
$n \frac{1-p}{p^2}$	$n \frac{1-p}{p}$	$\binom{k+n-1}{n-1} p^n (1-p)^k$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית