

באתר שלי: <http://www.math.tau.ac.il/~shlomiru>
 תוכלו למצוא פתרונות לבחינות רבות במבוא להסתברות.

פתרון הבחינה של פרופ' סמורודינסקי ופרופ' צירלסון מ 9.3.99

$$E(X) = 0.5 \cdot 10,000 = 5,000 \quad V(X) = 10,000 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 2,500 \quad \underline{1}$$

$$P(|X - 5,000| \geq k) = 2 \left(1 - \phi\left(\frac{k}{\sqrt{2,500}}\right) \right) \Rightarrow 2 \left(1 - \phi\left(\frac{k}{50}\right) \right) \leq \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \underline{2}$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{k}{50}\right) \geq \frac{17}{18} \cong 0.944 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{50} \geq 1.59 \quad \Rightarrow \quad k \geq 80$$

$$2 \left(1 - \phi\left(\frac{150}{50}\right) \right) = 2(1 - \phi(3)) \cong 2 \cdot 0.0013 = 0.0026 \quad \underline{3}$$

$$E(Y) + \rho_{X,Y} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - E(X)) = 75 + 0.6 \cdot \frac{5}{10} \cdot 5 = 76.5 \quad \underline{4}$$

$$(1 - \rho^2)V(Y) = (1 - 0.6^2) \cdot 25 = 16 \quad \underline{5}$$

$$E(X - 100) = 75 \quad E(Y) = 75 \quad V(X - 100) = V(X) = 100 \quad V(Y) = 25 \quad \underline{6}$$

$$\begin{aligned} E(X - 100 - Y)^2 &= V(X - 100 - Y) + E^2(X - 100 - Y) = V(X - 100 - Y) = \\ &= V(X - 100) + V(Y) - 2 \operatorname{cov}(X - 100, Y) = V(X - 100) + V(Y) - 2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y = \\ &= 100 + 25 - 2 \cdot 0.6 \cdot 5 \cdot 10 = 65 \end{aligned}$$

$$\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = \operatorname{cov}(75 + 0.3(X - 75), X - 100) = \operatorname{cov}(0.3X, X) = 0.3V(X) = 30 \quad \underline{7}$$

$$|a' - E(X)| = \rho_{X,Y} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} |Y - E(Y)| = \rho_{X,Y} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \rho_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} |a - E(X)| = \underline{8}$$

$$= 0.6^2 |a - E(X)|$$

$$E\left(\frac{X}{2}\right) = 0.5 \cdot \frac{1}{0.1} = 5 \quad \underline{10} \quad \text{בהינתן שהוטלו } k \text{ ביצים התוחלת היא } \frac{k}{2} \quad B(7, 0.5) \quad \underline{9}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(V(Y | X)) + V(E(Y | X)) = E(0.5 \cdot 0.5X) + V(0.5X) = \\ &= 0.25 \cdot 10 + 0.25V(X) = 2.5 + 0.25 \cdot \frac{0.9}{0.1^2} = 25 \end{aligned} \quad \underline{11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0.1 \cdot 0.9^{k-1} \cdot 0.5^k = \frac{0.05}{1 - 0.45} \quad \underline{12}$$

13. בהינתן שעשר פעמים התקבל 0, הסכוי שהפעם ה-100 היא אחת מהן הוא $\frac{10}{100}$.

א' לא נכון כי הפעם ה-100 חייבת להיות אחת ההצלחות.
 14. כל זמן צפיה לספרה מסוימת מתפלג כמו זמן צפיה לספרה אפס.

15. יש $\binom{100}{10}$ תת סדרות באורך 10. כל סדרה היא עולה ממש בסכוי $\frac{1}{10^{10}}$.

16. שוב יש $\binom{100}{10}$ תת סדרות באורך 10 ולגבי כל תת סדרה ההסתברות זזה להסתברות שבסעיף הקודם.

17. לגבי כל סדרה ההתפלגות של המאורעות האינדיקטורים זהה: $B(1, \frac{1}{10^{10}})$, לכן השונויות של האינדיקטורים זהות. ה- cov בין האינדיקטורים Y_i הם שונים בין זוגות שונים ובכל מקרה לא עולים על ה- cov בין האינדיקטורים Z_i בעלי אותם אינדקסים.

$$\frac{\frac{1}{n+1} \frac{i}{n}}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \frac{k}{n}} = \frac{i}{\sum_{k=0}^n k} = \frac{i}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2i}{n(n+1)} \quad \underline{18}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{2i}{n(n+1)} \frac{i-1}{n-1} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{(n-1)n(n+1)} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{i}{(n-1)n(n+1)} = \underline{19}$$

$$= 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n-1)(n+1)} - 2 \frac{n(n+1)}{2(n-1)n(n+1)} = 2 \frac{2n+1-3}{6(n-1)} = \frac{2}{3}$$

$$P(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\sum_{i=3}^n \frac{1}{n+1} \binom{i}{3} / \binom{n}{3}}{\sum_{i=2}^n \frac{1}{n+1} \binom{i}{2} / \binom{n}{2}} = \frac{\binom{n+1}{4} / \binom{n}{3}}{\binom{n+1}{3} / \binom{n}{2}} = \underline{20}$$

$$= \frac{((n+1)n(n-1)(n-2)/4!)(n(n-1)/2)}{((n+1)n(n-1)/3!)(n(n-1)(n-2)/3!)} = \frac{3}{4}$$

* מתבססים על זהות $\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ לפי ספירת האפשרויות לבחור $k+1$ עצמים מתוך $n+1$ לפי חלוקה למקרים. המקרה ה- m הוא שהנבחר ה- $k+1$ הוא העצם ה- $m+1$ ושבונוסף לו בוחרים k מתוך m הראשונים.