

מספר מחברת: _____

מספר ת.ז.: _____

**בחינה בקורס מבוא להסתברות
שנת תשע"ג, סמסטר א', מועד ב'
מרצה: אילון סולן**

תאריך הבחינה: 8.3.2013.

מספר הקורס: 1102 – 0365.

זמן הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: מחשבון כיס, 4 (ארבעה) עמודי נוסחאות.

השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן. לכל שאלה ניתנות 4 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה שנראית לך נכונה. סימון התשובה הנכונה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת בכל שאלה.

יש לסמן את התשובות בדף המצורף לפי ההנחיות המופיעות בו; שימו לב: לכל תשובה יש לציין כן/לא. הבחינה תיבדק באופן אוטומטי. אנא עיקבו אחרי ההוראות בדף התשובות כדי למנוע בדיקה לא מדויקת ועוגמת נפש מיותרת.

בהצלחה!

שלוש שאלות שאינן קשורות לסוגייה

1. יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים בעלי התפלגות ברנולי עם פרמטר p כאשר $0 < p < 1$. הגודל $E[\text{Var}(XY|X+Y)]$ שווה

(א) 0.

(ב) $p^2(1-p^2)$.

(ג) אם X ו- Y בלתי תלויים גודל זה שווה $(1-p^2)(1-(1-p)^2)$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

2. יהיו (Ω_1, P_1) ו- (Ω_2, P_2) שני מרחבי ההסתברות הבאים:

• $P_1(k) = \frac{1}{N}$, $\Omega_1 = \{1, 2, \dots, N\}$ לכל $k \in \Omega_1$ (התפלגות אחידה).

• $P_2(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $\Omega_2 = \{0, 1, \dots, n\}$ לכל $k \in \Omega_2$ (התפלגות בינומית), כאשר $0 < p < 1$.

(א) קיימת פונקציה שומרת הסתברות $f_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ אם ורק אם $N = n + 1$.

(ב) קיימת פונקציה שומרת הסתברות $f_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ אם ורק אם $N = 2$, $n = 1$ ו- $p = \frac{1}{2}$.

(ג) קיימת פונקציה שומרת הסתברות $f_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ אם ורק אם $N = 2$, $n = 1$ ו- p רציונלי.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

3. יהיו X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות בעלי תוחלת μ ושוונות σ^2 המקבלים ערכים שלמים בין 1 ל- n . התוחלת $E\left[\sum_{i=1}^{X_1} X_i\right]$ שווה

(א) μ^2 .

(ב) $\mu + \mu^2$.

(ג) $\sigma^2 + \mu^2$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוגייה ראשונה

יהיו $p, q \in (0, 1)$. ישעיהו ומיכה הם שני נביאים המתנבאים לפני העם. בכל יום אלוהים מטיל קובייה הוגנת. אם תוצאת ההטלה היא 1 או 2 הוא מתגלה ביום זה לישעיהו (ולא למיכה), אם תוצאת ההטלה היא 3 הוא מתגלה ביום זה למיכה (ולא לישעיהו), אם תוצאת ההטלה היא 4 או 5 הוא מתגלה ביום זה לשניהם ואם תוצאת ההטלה היא 6 הוא אינו מתגלה ביום זה לאף אחד מהם.

בכל יום שבו אלוהים מתגלה לישעיהו, בהסתברות p (באופן בלתי תלוי בכל המאורעות האחרים בשאלה) ישעיהו מוכיח את העם על כך שמנהיגיו סוררים, חברי גנבים ולוקחי שוחד. בכל יום שבו אלוהים מתגלה למיכה, בהסתברות q (באופן בלתי תלוי בכל המאורעות האחרים בשאלה) מיכה מוכיח את העם על כך שהם חומדים שדות וגוזלים בתים ונחלות.

4. ההסתברות שמיכה או ישעיהו יוכיחו את העם ביום המאתיים לעליית המלך חזקיהו היא:

$$(א) \frac{q+2p}{6}$$

$$(ב) \frac{3q+4p}{6}$$

$$(ג) \frac{3q+4p-2pq}{6}$$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

5. ההסתברות המותנה שביום המאתיים לעליית המלך חזקיהו אלוהים התגלה הן למיכה והן לישעיהו בהינתן שאף אחד מהם לא הוכיח באותו יום היא:

$$(א) \frac{1}{3}(1-p)(1-q)$$

$$(ב) \frac{2(1-p)(1-q)}{6-3q-4p+2pq}$$

$$(ג) \frac{6(1-p)(1-q)}{6-3q-4p+2pq}$$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

6. ההסתברות המותנה שישעיהו הוכיח את העם ביום המאתיים לעליית המלך חזקיהו בהינתן שמיכה הוכיח את העם באותו יום היא:

$$(א) 2p$$

$$(ב) \frac{2p}{3}$$

$$(ג) \frac{1}{3}pq$$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

7. יהי X המשתנה המקרי השווה 1 אם ביום המאתיים לעליית המלך חזקיהו ישעיהו הוכיח את העם ו-0 אחרת. יהי Y המשתנה המקרי השווה 1 אם ביום המאתיים לעליית המלך חזקיהו מיכה הוכיח את העם ו-0 אחרת. מקדם המתאם $\rho(X, Y)$ שווה:

(א) 0.

(ב) $\sqrt{\frac{pq}{3}}$.

(ג) $\frac{2pq-3q-4p}{6\sqrt{\frac{1}{2}q(1-\frac{1}{2}q)}\sqrt{\frac{2}{3}p(1-\frac{2}{3}p)}}$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

8. בשאלה זו נניח כי $p = \frac{4}{5}$. אלוהים החל להתגלות לישעיהו ולמיכה ב-א' תשרי שנת ג'ג (757 לפני הספירה). נסמן ב- n את מספר הימים המינימלי המקיים שההסתברות של המאורע "ישעיהו הוכיח את העם לפחות $\frac{n}{2}$ פעמים" גדולה מ-0.8. לפי משפט הגבול המרכזי,

(א) $72 \leq n \leq 81$.

(ב) $37 \leq n \leq 47$.

(ג) $156 \leq n \leq 165$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוגייה שנייה

על השולחן מסודרים בשורה n כדים הממוספרים מ-1 עד n . בכל כד נמצא כדור שעליו רשום מספר השווה למספר הכד שבו הוא נמצא. בכל שלב ניקולא בוחר באקראי את אחד הכדורים (כל הכדורים נבחרים באותה הסתברות), שולף אותו מהכד שבו הוא נמצא, בוחר כד אקראי (שיכול להיות אותו כד שממנו נשלף הכדור; כל הכדים נבחרים באותה הסתברות) ומכניס לכד זה את הכדור.

9. ההסתברות שלאחר השלב הראשון בכל הכדים יש כדור אחד שווה:

(א) 0.

(ב) $\frac{1}{n}$.

(ג) 1.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

10. ההסתברות שלאחר השלב השני בכל הכדים יש כדור אחד שווה:

(א) 0.

(ב) $\frac{1}{n^2}$.

(ג) $\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

11. יהי X השלב הראשון שבו לפחות אחד הכדים ריק. ההתפלגות של X היא:

(א) $X - 1$ מפולג פואסונית.

(ב) X אינו משתנה מקרי אלא מספר ממשי ולכן אין לו התפלגות.

(ג) X מפולג בינומית שלילית שאינה גיאומטרית.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

לכל $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ נסמן ב- X_i את מספר הכדורים שכל i מכיל בשלב ה-37.
 12. התוחלת $E[X_n]$ שווה

(א) $\frac{1}{n^{37}}$

(ב) $\frac{1}{2}$

(ג) 1

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

13. מקדם המתאם $\rho(X_1, X_2)$ שווה

(א) 0

(ב) $-\frac{1}{n-1}$

(ג) $-\sqrt{\frac{1}{n-1}}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

14. בהינתן שהכד הראשון ריק בשלב ה-37, ההסתברות שהוא יהיה ריק בשלב ה-40 היא:

(א) $\frac{n^3 - 3n^2 + 5n - 2}{n^3}$

(ב) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^3$

(ג) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^3$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוגייה שלישית

בשדה התעופה בארץ זולו ישנו מסלול נחיתה אחד. בגלל תנאי מזג האוויר המיוחדים השוררים סביב המדינה (סופות חול עזות הנמשכות מ-10: 8 בבוקר עד 50: 7 בבוקר ביום המחרת), כל הטיסות המגיעות למדינה נכנסות לתחום האווירי שלה בשעה 00: 8 בבוקר בדיוק.

מספר הטיסות המגיעות בכל יום הוא משתנה מקרי Y בעל תוחלת μ_Y ושונות $(\sigma_Y)^2$. המשתנה המקרי Y חסום על ידי n . משך הזמן שעובר מרגע שמטוס k מקבל אישור נחיתה ועד הרגע שבו הוא מפנה את המסלול ואישור נחיתה ניתן למטוס הבא הוא משתנה מקרי X_k בעל תוחלת μ_X ושונות $(\sigma_X)^2$. שים לב: למשתנים המקריים $(X_k)_{k=1}^n$ אותה תוחלת ואותה שונות. נתון כי המשתנים המקריים $(X_k)_{k=1}^n, Y$ בלתי תלויים.

נסמן ב- $Z = \sum_{k=1}^Y X_k$ את משך הזמן מהרגע שהטיסה הראשונה קיבלה אישור נחיתה עד שהטיסה האחרונה פינתה את מסלול הנחיתה. המשתנים המקריים $(X_k)_{k=1}^n$ מקיימים כי סכומם, Z , קטן מ-23 שעות ו-40 דקות.

15. התוחלת $E[Z]$ שווה:

(א) $\mu_X \mu_Y$.

(ב) $\mu_X + \mu_Y$.

(ג) אין מספיק נתונים לענות על השאלה.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

16. יהי k ערך שאותו המשתנה המקרי Y מקבל בהסתברות חיובית (כלומר, $P(Y = k) > 0$). השונות המותנה $\text{Var}(Z | Y = k)$ שווה:

(א) $(\sigma_X)^2$.

(ב) $k(\sigma_X)^2$.

(ג) אין מספיק נתונים לענות על השאלה.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

17. השונות $\text{Var}(Z)$ שווה:

(א) $\mu_Y(\sigma_X)^2 + \mu_X^2(\sigma_Y)^2$

(ב) $\mu_Y(\sigma_X)^2 + \mu_X(\sigma_Y)^2$

(ג) $\mu_Y(\sigma_X)^2 + \mu_X\sigma_Y$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

18. השונות המשותפת $\text{Cov}(Y, Z)$ שווה:

(א) 1.

(ב) $(\sigma_Y)^2\mu_X$

(ג) $(\sigma_Y)^2\mu_X - \mu_X\mu_Y$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

19. המשתנים המקריים $(X_k)_{k=1}^n$ נמדדים בדקות. כל דקת המתנה שמשוס ממתין באוויר עד הרגע שבו הוא מקבל אישור נחיתה עולה דולר אחד. תוחלת הסכום המתבזבז בגלל ההמתנה היא:

(א) $\mu_X(\mu_Y - 1)$

(ב) $\frac{1}{2}\mu_X((\sigma_Y)^2 - \mu_Y)$

(ג) $\frac{1}{2}\mu_X((\sigma_Y)^2 + (\mu_Y)^2 - \mu_Y)$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

20. עבור שאלה זו בלבד נניח כי X_k הוא משתנה מקרי בינומי עם פרמטרים k ו- p (כאשר $p \in (0, 1)$). התוחלת $E[Z]$ היא:

(א) $p(\mu_Y)^2$

(ב) $p((\mu_Y)^2 + (\sigma_Y)^2)$

(ג) $\frac{p}{2}((\sigma_Y)^2 + (\mu_Y)^2 - \mu_Y)$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.