

**סמסטר א', מועד א', תשע"א, 8.2.2011**

**בחינה ב' מבוא להסתברות" (המרצה: דר' רוז פלד)**

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון.

השאלון מורכב מ- 20 שאלות. כל תשובה נכונה מזכה ב- 6+ נקודות וכל תשובה לא נכונה מזכה ב- (2-) נקודות. מותר לסמן יותר מתשובה אחת לשאלה. אם צברת S נקודות, ציוןך  $\max(\min(S, 100), 0)$ .

יש לרשום את התשובות הסופיות לשאלות בטבלאות הבאות (מחברת תבחינה ושאר הדפים בטופס המבחן משמשים לטייטא בלבד ולא ייבדקו).

בהצלחה!!!

	1	2	3	4	5	6	7
א							
ב							
ג							
ד							

	8	9	10	11	12	13
א						
ב						
ג						
ד						

	14	15	16	17	18	19
א						
ב						
ג						
ד						

	20
א	
ב	
ג	
ד	

### סוגיה ראשונה

בקופסה 120 כדורים מהם  $X$  לבנים ו- $(120-X)$  אדומים עבור משתנה מקרי  $X$ . ידוע ש- $E(X)=30$ . מוציאים מהקופסה  $k$  כדורים באקראי ועם החזרה (כלומר, סיכוי שווה לכל כדור בכל שליפה מהקופסה), עבור  $k \geq 2$ . יהי  $Y$  מספר הכדורים הלבנים במדגם.

1. מה הסיכוי שהכדור הראשון שיצא הינו לבן?

א.  $1/2$

ב.  $1/4$

ג.  $3/4$

ד. אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה

2. הצבעים של שני הכדורים הראשונים הם ב"ת:

א. תמיד

ב. אף פעם לא

ג. אם ורק אם  $X$  מתפלג אחיד בין 0 ל-120

ד. אם ורק אם  $X$  קבוע (מקבל ערך בודד בסיכוי 1)

3. מהי תוחלת  $Y$ ?

א.  $k/4$

ב.  $k/2$

ג.  $1/4 \cdot (1-1/4) \cdot k$

ד. אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה

4. האם  $\text{cov}(X, Y)$  הוא

א. קטן ממש מאפס תמיד

ב. שווה לאפס תמיד

ג. גדול ממש מאפס תמיד

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

החל מסעיף זה והלאה, נתון בנוסף ש- $\text{Var}(X)=25$ .

5. מהי ההסתברות ששני הכדורים הראשונים שהוצאו הינם לבנים?

א.  $(1/4)^2$

ב.  $925/(120^2)$

ג.  $900/(120^2)$

ד. אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה

6. אם מוציאים את הכדורים ללא החזרה, מהי ההסתברות ששני הכדורים הראשונים שהוצאו הינם לבנים?

א.  $(30-29)/(120-119)$

ב.  $925/(120-119)$

ג.  $895/(120-119)$

ד. אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה

7. בהינתן התוחלת והשונות של  $X$  הנתונים, האם ייתכן ש-  $P(X > 90) = 0.2$ :

א. לא, מפני שלפי אי-שיויון מרקוב היא קטנה מ-  $1/9$

ב. כן, מפני שלפי אי-שיויון מרקוב היא קטנה מ-  $1/3$

ג. לא, מפני שלפי אי-שיויון צ'בישב היא קטנה מ-  $1/144$

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

### סוגיה שנייה:

בחפיסת קלפים יש קלפים הממוספרים מ-1 עד 13 ולכל מספר 4 סמלים: לב, תלתן, עלה ויהלום (סה"כ 52 קלפים). בצידו האחד של כל קלף יש סמל ומספר וצידו השני חלק ללא כיתוב. בטבלה בעלת 13 שורות, ו-4 עמודות מסדרים את כל 52 הקלפים בסדר אקראי (סיכוי שווה לכל אחד מ-52! הסדרים האפשריים) כך שכל הקלפים עם הפנים למעלה (כלומר, כל המספרים והסמלים גלויים).

8. שורה נקראת "שורה לבבית" אם באותה השורה יש לפחות קלף אחד עם הסמל לב. מהי תוחלת מספר ה"שורות הלבביות"?

א.  $13 \left( 1 - \frac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}} \right)$

ב.  $13 \cdot 4 \cdot 13 \cdot \frac{\binom{39}{3}}{3}$

ג.  $13 \frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}$

ד.  $13 \frac{13!4!}{52!}$

9. יהי  $C_i$  מספר הקלפים עם הסמל לב שיש בעמודה ה- $i$ , עבור  $i=1,2,3,4$ . מקדם המתאם בין  $35(C_1+C_3)$  לבין  $17(C_2+C_4)$  הוא

- א. שווה ל-(-1)
- ב. שווה ל-0
- ג. שווה ל-1
- ד. גדול ממש מ-0 וקטן ממש מ-1

נסמן ב- $Y$  את מספר הקלפים עם הסמל לב בשלוש השורות הראשונות בטבלה. איציק הופך כל אחד מהקלפים בשלוש השורות הראשונות של הטבלה בסיכוי חצי באופן בלתי תלוי בין קלף לקלף. לאחר ההיפוך, יהי  $X$  מספר הקלפים בהם הסמל לב גלוי (כלומר, קלפים עם הסמל לב שלא נהפכו) בשלוש השורות הראשונות.

10. כיצד מתפלג  $Y$ ?

- א. בינומית
- ב. גיאומטרית
- ג. היפרגיאומטרית
- ד. אחיד

11. כיצד מתפלג  $X$  בהינתן  $Y$ ?

- א. בינומית
- ב. גיאומטרית
- ג. היפרגיאומטרית
- ד. אחיד

12. לאחר ההיפוך הקלפים, מהי תוחלת מספר הקלפים בהם הסמל לב גלוי בטבלה כולה?

- א. 10
- ב.  $10\frac{1}{2}$
- ג. 11
- ד.  $11\frac{1}{2}$

13.  $\text{cov}(X, Y)$  שווה ל-

א.  $\frac{9}{4} \left(1 - \frac{11}{51}\right)$

ב.  $\frac{9}{8} \left(1 - \frac{11}{51}\right)$

ג.  $\frac{3}{2} \left(1 - \frac{11}{51}\right)$

ד.  $\frac{9}{2} \left(1 - \frac{11}{51}\right)$

### סוגיה שלישית:

יהי  $X$  משתנה מקרי המקבל את הערך 1 בסיכוי  $p$  ואת הערך 1- בסיכוי  $1-p$  עבור מספר  $0 \leq p \leq 1$ .

יהיו  $X_1, X_2, X_3$  משתנים מקריים בלתי תלויים ומפולגים כמו  $X$ .

נסמן  $Y_1 = X_1 X_2, Y_2 = X_2 X_3, Y_3 = X_1 X_3$ .

14. האם  $Y_1$  ו- $Y_2$  בלתי תלויים?

- א. תמיד
- ב. אף פעם
- ג. הם בלתי תלויים עבור בדיוק שני ערכי  $p$
- ד. הם בלתי תלויים עבור בדיוק שלושה ערכי  $p$

15. האם  $Y_1$  ו- $Y_2 Y_3$  בלתי תלויים?

- א. תמיד
- ב. אף פעם
- ג. הם בלתי תלויים עבור בדיוק שני ערכי  $p$
- ד. הם בלתי תלויים עבור בדיוק שלושה ערכי  $p$

16. האם  $Y_1$  ו- $Y_1 Y_2 Y_3$  בלתי תלויים?

- א. תמיד
- ב. אף פעם
- ג. הם בלתי תלויים עבור בדיוק שני ערכי  $p$
- ד. הם בלתי תלויים עבור בדיוק שלושה ערכי  $p$

17. מהי השונות של  $Y_1 Y_2$  ?

- א.  $2p-1$
- ב.  $(2p-1)^2$
- ג.  $1-(2p-1)^2$
- ד.  $1-(2p-1)^4$

18. האם  $\text{cov}(Y_1, Y_2) < E(Y_1)$  ?

- א. תמיד
- ב. אף פעם
- ג. אך ורק כאשר  $p > 1/2$
- ד. לכל  $p$  פרט לערך יחיד

19. חשב את  $P(X_1=1 | Y_1=1, Y_2=1)$

- א.  $\frac{p^3}{p^3 + (1-p)^3}$
- ב.  $\frac{1}{3p^2(1-p) + 3p(1-p)^2}$
- ג.  $\frac{3p(1-p)^2}{p^3 + 3p(1-p)^2}$
- ד.  $p$

### שאלה שאינה חלק מסוגיה:

20. האם סכום של משתנים בינומיים בלתי תלויים:

- א. מתפלג תמיד בינומית
- ב. מתפלג תמיד בינומית שלילית
- ג. מתפלג בינומית אם ורק אם המשתנים שזוי התפלגות
- ד. אף תשובה אינה נכונה

## רשימת נוסחאות

Var(X)	E(X)	P(X=k)	ההתפלגות	
$np(1-p)$	$np$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	Bin(n,p)	בינומית
$\lambda$	$\lambda$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	Poisson( $\lambda$ )	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	Geom(p)	גיאומטרית
$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{1}{n}$	Unif({1,2,...,n})	אחידה על {1,2,...,n}
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	NB(n,p)	בינומית-שלילית
$n \frac{G}{N} \left(1 - \frac{G}{N}\right) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$	$n \frac{G}{N}$	$\frac{\binom{G}{k} \binom{N-G}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	Hg(N,G,n)	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$E(X) = E(E(X | Y))$$

$$\text{Var}(X) = E(\text{Var}(X | Y)) + \text{Var}(E(X | Y))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - E(X)) + E(Y)$$

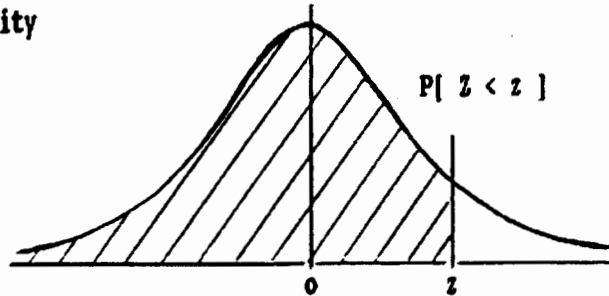
$\lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407
$\lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001

## STANDARD STATISTICAL TABLES

### 1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value  $z$  i.e.

$$P\{Z < z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$$



$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
3.1	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
3.2	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
3.3	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
3.4	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
3.5	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
3.6	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
3.7	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
3.8	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
3.9	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
4.0	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986
z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000