

סמסטר א', מועד א', תשס"ה
 תאריך הבחינה: 08.02.2005
 מספר קורס: 0365-1102

מס' מחברת: _____
 מס' ת.ז.: _____

בחינה במבוא להסתברות

המרצים: פרופ' דוד גילת, פרופ' אהוד לרר

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר: מותר להשתמש בדף סיכום אישי. מחשב כיס מותר – אך מיותר

הוראות ושיטת הניקוד: השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. לכל שאלה ניתנות 4 תשובות, אחת ורק אחת מהן נכונה. סימון התשובה הנכונה בצורה ברורה בטבלת התשובות המופיעה בעמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה שגויה נושא 2 נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה. אי סימון אף אחת מהתשובות יחשב כהצהרה "איני יודע", ונקודת זכות אחת תינתן במקרה זה. טווח הנקודות האפשרי הוא 108- עד 108, והציון של נבחן הצובר N נקודות יהיה $\max\{0, \min\{N, 100\}\}$. לעזרתך מצורפת בסוף טופס הבחינה טבלת שטחים מתחת לעקום הנורמלי.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5
א		X			
ב	X		X		X
ג				X	
ד					

	6	7	8	9
א				X
ב				
ג		X	X	
ד	X			

	10	11	12	13
א		X		
ב	X		X	X
ג				
ד				

	14	15	16	17	18
א					X
ב		X			
ג				X	
ד	X		X		

לשימוש הבודק:

תשובות נכונות	תשובות שגויות	תשובות "איני יודע"	ציון סופי

סוגיה 1

אורלי ובעז מבצעים כל אחד, באופן בלתי-תלוי זו מזה, סדרת הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן ($p = 1/2$). יהיו S_n ו- T_n מספרי ה"ראשיט" ב- n ההטלות הראשונות של אורלי ובעז, בהתאמה.

1. לכל n , הסכום $P(S_n > T_n) + \frac{1}{2}P(S_n = T_n)$

- | | |
|--|--|
| <p>א. קטן מ-$\frac{1}{2}$</p> <p>ב. שווה ל-$\frac{1}{2}$</p> <p>ג. גדול מ-$\frac{1}{2}$</p> <p>ד. קטן מ-$\frac{1}{2}$ עבור n זוגי, וגדול מ-$\frac{1}{2}$ עבור n אי-זוגי</p> | <p>א. קטן מ-$\frac{1}{2}$</p> <p>ב. שווה ל-$\frac{1}{2}$</p> <p>ג. גדול מ-$\frac{1}{2}$</p> <p>ד. קטן מ-$\frac{1}{2}$ עבור n זוגי, וגדול מ-$\frac{1}{2}$ עבור n אי-זוגי</p> |
|--|--|

2. יהיו $\beta_n = P(S_{2n} = n)$, $\alpha_n = P(S_n = T_n)$

- | | |
|--|--|
| <p>א. $\alpha_n = \beta_n$</p> <p>ב. $\alpha_n < \beta_n$</p> <p>ג. $\alpha_n > \beta_n$</p> <p>ד. הסדר היחסי של α_n ו-β_n תלוי ב-n</p> | <p>א. $\alpha_n = \beta_n$</p> <p>ב. $\alpha_n < \beta_n$</p> <p>ג. $\alpha_n > \beta_n$</p> <p>ד. הסדר היחסי של α_n ו-β_n תלוי ב-n</p> |
|--|--|

3. ההסתברות $P(S_{n+1} > T_n)$

- | | |
|--|--|
| <p>א. גדולה מ-$\frac{1}{2}$</p> <p>ב. שווה ל-$\frac{1}{2}$</p> <p>ג. קטנה מ-$\frac{1}{2}$</p> <p>ד. גדולה מ-$\frac{1}{2}$ עבור n זוגי, וקטנה מ-$\frac{1}{2}$ עבור n אי-זוגי</p> | <p>א. גדולה מ-$\frac{1}{2}$</p> <p>ב. שווה ל-$\frac{1}{2}$</p> <p>ג. קטנה מ-$\frac{1}{2}$</p> <p>ד. גדולה מ-$\frac{1}{2}$ עבור n זוגי, וקטנה מ-$\frac{1}{2}$ עבור n אי-זוגי</p> |
|--|--|

4. לפי אי-שיוויון צ'בישב, החסם העליון הקטן ביותר (בהתחשב בסימטריה של ההתפלגות) להסתברות $P(S_{2n} - T_{2n} \geq n)$ הוא

- | | |
|--|--|
| <p>א. $\frac{1}{2}$</p> <p>ב. $\frac{1}{n}$</p> <p>ג. $\frac{1}{2n}$</p> <p>ד. $\frac{1}{n^2}$</p> | <p>א. $\frac{1}{2}$</p> <p>ב. $\frac{1}{n}$</p> <p>ג. $\frac{1}{2n}$</p> <p>ד. $\frac{1}{n^2}$</p> |
|--|--|

5. עבור n גדול, ההערכה לפי משפט הגבול המרכזי להסתברות $P(S_{2n} - T_{2n} \geq \sqrt{n})$ קרובה ביותר ל-

- | | |
|--|--|
| <p>א. 0.02</p> <p>ב. 0.15</p> <p>ג. 0.35</p> <p>ד. הקירוב הנורמלי לא חל על מקרה זה</p> | <p>א. 0.02</p> <p>ב. 0.15</p> <p>ג. 0.35</p> <p>ד. הקירוב הנורמלי לא חל על מקרה זה</p> |
|--|--|

סוגיה 2

לקידום מכירות של דגנים לארוחות בוקר מכרז היצרן על פרס לכל מי שיצבור אוסף מלא של n בולים שונים. n סוגי הבולים מפוזרים באופן אחיד, כך שבכל קניה של אריזה אחת הסיכוי לקבל בול מסוג מסוים הוא $1/n$.

6. אדם קונה $n+1$ אריזות. מה הסיכוי שיהיה בידיו אוסף מלא של n בולים שונים?

א. $\frac{(n-1)(n-1)!}{n^{n-1}}$ ב. $\frac{(n+1)(n-1)!}{n^{n-1}}$

ג. $\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$ ד. אף אחת מהתשובות

7. שני אנשים קנו ביחד $2n$ אריזות ומצאו שיש להם ביחד שניים מכל סוג בול. מהו מספר האפשרויות לחלק ביניהם את האריזות, כך שלכל אחד מהם יהיה אוסף מלא של n בולים שונים?

א. $\binom{2n}{n}$ ב. n^2

ג. 2^n ד. 2

8. אדם החליט לקנות אריזות עד שיצבור אוסף מלא של n בולים שונים. מהי תוחלת מספר האריזות שיקנה?

א. $n \log n$ ב. $\frac{n(n+1)}{2}$

ג. $n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$ ד. אף אחת מהתשובות

9. אדם קונה k אריזות. מהי תוחלת מספר הבולים השונים שבידיו?

א. $n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^k \right)$ ב. $\frac{k}{n}$

ג. $n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^k$ ד. אף אחת מהתשובות

סוגיה 3

מטילים 3 קוביות הוגנות עד שהתוצאות של כולן הן 6. עושים זאת בשתי שיטות:
שיטה א': בכל תקופה מטילים את כל 3 הקוביות ומפסיקים רק כאשר מתקבל 6 בשלושתן במקביל.

שיטה ב': בכל תקופה מטילים רק את הקוביות שעדיין לא התקבלה בהן תוצאה 6. ברגע שתוצאת קוביה מסוימת היא 6, הקוביה הנייל יוצאת מהמשחק ולא מטילים אותה עוד.
 נגדיר:

Z , מספר התקופות הנדרש לפי שיטה א'.

Y , מספר התקופות הנדרש לפי שיטה ב'.

X , מספר הקוביות שהתקבלה בהן תוצאה 6 בתקופה הראשונה.

10. $E(Z|X)$ הוא

- א. משתנה מקרי המתפלג גיאומטרית
 ב. משתנה מקרי שמקבל רק שני ערכים בהסתברויות חיוביות
 ג. משתנה מקרי שמקבל את הערך 2 בהסתברות חיובית
 ד. שווה ל- $E(Z|Y=1)$

11. התוחלת $E(X)$ שווה ל-

- א. $\frac{1}{2}$
 ב. $\frac{1}{6}$
 ג. $\frac{2}{3}$
 ד. $\frac{5}{12}$

12. איזו מהטענות הבאות היא הנכונה?

- א. $E(Y|X=0) = E(Y)$
 ב. $E(Y) > \frac{P(X=0)}{1-P(X=0)}$
 ג. $E(Y) > 6^3$
 ד. $E(Y|X=2)$ מתפלג גיאומטרית

13. ההסתברות המותנה $P(Y=2|X=2)$ שווה ל-

- א. $\binom{3}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$
 ב. $\frac{1}{6}$
 ג. $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
 ד. אף אחת מהתשובות

סוגיה 4

אורי ואורה בחרו להפגש באחד מ-6 הצמתים (הממוספרים מ-1 ועד 6) שבין רחי איינשטיין לרחי ארלוזורוב, אך שכחו לציין באיזה מהם בדיוק. כל אחד מהם החליט לבחור צומת באקראי ולחכות שם. יהי X מס' הצומת שבחר אורי, ויהי Y מס' הצומת שבחרה אורה, כאשר X ו- Y בלתי תלויים. נגדיר את המאורעות $A = [X < Y]$, $B = [|X - Y| \leq 2]$.

14. ההסתברות $P(B)$ שווה ל-

- | | |
|----|---------------|
| א. | $\frac{1}{3}$ |
| ב. | $\frac{1}{2}$ |
| ג. | $\frac{5}{6}$ |
| ד. | $\frac{2}{3}$ |

15. התוחלת המותנה $E(X|A)$ שווה ל-

- | | |
|----|---------------|
| א. | $\frac{7}{2}$ |
| ב. | $\frac{7}{3}$ |
| ג. | $\frac{8}{3}$ |
| ד. | 3 |

16. כל ערכי x שעבורם $P(A \cap B | X = x) \geq P(A | X = x)P(B | X = x)$ הם

- | | |
|----|---------|
| א. | 1,2,3,6 |
| ב. | 1,2 |
| ג. | 1,2,6 |
| ד. | 4,5,6 |

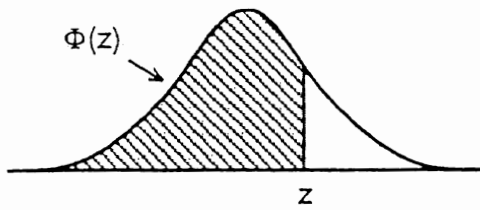
17. איזו מהטענות הבאות היא הנכונה?

- | | |
|----|--|
| א. | ל- $P(A X)$ אין משמעות כי X אינו מאורע |
| ב. | $P(A X)$ הוא מ"מ שתוחלתו $\frac{1}{3}$ |
| ג. | $P(A X) = P(A X^2)$ |
| ד. | $P(A X) + P(B X) = P(A \cup B X)$ |

18. התוחלת המותנה $E(|X - Y| | B)$ שווה ל-

- | | |
|----|-----------------|
| א. | $\frac{13}{12}$ |
| ב. | 1 |
| ג. | $\frac{5}{8}$ |
| ד. | $\frac{2}{3}$ |

נספח 1 טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995