

סמסטר ב', מועד ב', תשס"ט
 תאריך הבחינה: 07.09.2009
 מספר קורס: 0365 - 1102

מספר מחברת _____
 מספר ת.ז. _____

בחינה במבוא להסתברות

צוות ההוראה: פרופ' דוד גילת – שיעור, יובל הלר ודו"ע טפר - תרגיל

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף (אחד בלבד) של סיכום אישי ובחומר העזר המצורף לשאלון.
 מחשב כיס – מותר, אך מיותר.

השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
 לכל שאלה ניתנות 3 תשובות שלכל היותר אחת מהן נכונה. סמן בטבלת התשובות את זו הנראית לך נכונה.
 אם כל 3 התשובות נראות לך לא נכונות, סמן (ד).
 סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מקנה 6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה
 נושאת 2 נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה. לעידוד הימנעות מניחושים סתמיים,
 תינתן נקודת בונוס אחת לכל שאלה שלגביה לא סומנה אף אחת מהאפשרויות.

דוגמה:

| | | | | | | | | |
|---|----|---|----|----|----|---|---|--------------|
| □ | × | □ | □ | □ | × | □ | × | א |
| □ | □ | × | □ | □ | □ | × | □ | ב |
| □ | □ | □ | × | □ | × | □ | × | ג |
| □ | □ | □ | □ | × | □ | × | × | ד |
| 1 | -2 | 6 | -2 | -2 | -1 | 1 | 0 | ניקוד: |
| ג | ג | ב | א | ג | ב | ב | א | תשובה נכונה: |

מספר נקודות הזכות (החובה) המרבי הוא 120 (120).
 הציון של הצובר N נקודות יהיה $\min\{100, \max\{N, 0\}\}$

בהצלחה!

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| א | | | | | | | |
| ב | | | | | | | |
| ג | | | | | | | |
| ד | | | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|----|
| | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| א | | | | | | |
| ב | | | | | | |
| ג | | | | | | |
| ד | | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| א | | | | | | | |
| ב | | | | | | | |
| ג | | | | | | | |
| ד | | | | | | | |

I סוגיה

מתבצעת סדרת הטלות בלתי תלויות של מטבע שעל על צידו האחד מוטבע 1 ועל צידו האחר מוטבע 0, עם סיכוי p ל-1 וסיכוי $1-p$ ל-0 בהטלה בודדת ($0 < p < 1$).

יהי X_k המ"מ המציין את המאורע: התקבל 1 בהטלה ה- k -ית, ויהי $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ מספר הפעמים

שהתקבל 1 ב- n ההטלות הראשונות. עבור מספרים טבעיים $m \leq n$:

1. $P(S_m = m | S_n = m)$ שווה ל-: (א) m/n (ב) $\frac{m!(n-m)!}{n!}$ (ג) m/n אך ורק כאשר $p=1/2$
2. $E(S_m | S_n)$ שווה ל-: (א) $(m/n)S_n$ (ב) m/n (ג) m/n אך ורק כאשר $p=1/2$
(רמז: $E(X_i | S_n) = E(X_j | S_n)$ לכל $n \geq i, j$.)

3. $E(S_n | S_m)$ שווה ל-: (א) $(n/m)S_m$ (ב) $(1+p)S_m$ (ג) $S_m + (n-m)p$

4. מקדם המתאם $\rho(S_m, S_n)$ שווה ל-: (א) $\sqrt{m/n}$ (ב) m/n (ג) $(m/n)\sqrt{p(1-p)}$

עבור $r = 1, 2, 3, \dots$ יהי $T_r = \min\{n : S_n = r\}$

(לדוגמה: בסדרת הטלות שתחילתה 001100010 (משמאל לימין) $T_1 = 3, T_2 = 4, T_3 = 8$)

5. $E(T_r | T_{r-1})$ שווה ל-: (א) $T_{r-1} + p^{-1}$ (ב) $pT_{r-1} + (1-p)ET_1$ (ג) $T_{r-1} + 1$

6. $E(T_r)$ שווה ל-: (א) $(r/p)^2$ (ב) $\sqrt{r/p}$ (ג) r/p

7. לכל $s > r$, ההפרש $T_s - T_r$ ו- T_{s-r} הם משתנים מקריים:

(א) בלתי תלויים (ב"ת) ושווי התפלגות ("ש"ה) (ב) ב"ת אך לא ש"ה (ג) ש"ה אך לא תמיד (לא לכל $s > r$) ב"ת

II סוגיה

בבחינה הנוכחית תלמיד יודע את התשובה הנכונה לשאלה מסוימת בסיכוי $1/2$ ובמקרה זה הוא מסמן אותה בטבלת התשובות זוכה ב-6 נקודות. בסיכוי המשלים, אף הוא $1/2$, הוא אינו יודע את התשובה הנכונה ובמקרה זה הוא בוחר באקראי שתיים מארבע האפשרויות, מסמן אותן בטבלת התשובות זוכה ב-4 או -4 נקודות (לפי המקרה). התלמיד נוהג כך בכל אחת מ-20 השאלות באופן בלתי תלוי ב-19 האחרות. יהי X הניקוד של התלמיד בשאלה מסוימת, ויהי A המאורע שהתלמיד יודע את התשובה הנכונה לשאלה זו.

8. $P(X > 0)$ שווה ל-: (א) $5/8$ (ב) $3/4$ (ג) $7/8$

9. $P(A | X > 0)$ שווה ל-: (א) $2/3$ (ב) $3/4$ (ג) $4/5$

10. הסיכוי שהתלמיד יקבל ניקוד חיובי על לפחות 15 מ-20 השאלות הוא:

- (א) יותר מ-50% (ב) פחות מ-50% אך יותר מ-25% (ג) פחות מ-25%

11. השונות של X היא: (א) 9 (ב) 13 (ג) 17

- בשתי השאלות הבאות (12, 13) השתמשו בקירוב הנורמאלי. התשובות הניתנות מעוגלות ל- 5% הקרובים.
12. הסיכוי שהניקוד הכולל של התלמיד בבחינה יהיה בין 60 ל-80 הוא בקירוב: (א) 15% (ב) 35% (ג) 75%
13. 100 תלמידים דוגמת התלמיד הנ"ל משתתפים בבחינה ונוהגים כ"א כמוהו (באופן בלתי תלוי בכל האחרים). הסיכוי שהציון (הניקוד) הממוצע של הכיתה יהיה בין 58 ל-64 הוא בסביבות: (א) 40% (ב) 70% (ג) 85%
- (הערות שאפשר להתעלם מהן: א) השיטה הנקוטה בידי הנבחנים בסוגיה זו אינה אופטימאלית (מדוע?)
 ב) בשאלה 12 הקירוב הנורמאלי אינו תקף (מדוע?), אך למרות זאת התבקשתם לפעול לפיו.)

III סוגיה

יהיו A_1, A_2, \dots, A_n מאורעות בעלי ההסתברויות p_1, p_2, \dots, p_n בהתאמה ($0 < p_i < 1$ לכל i). יהי S סכום האינדקאטורים שלהם, כלומר S הוא מספר המאורעות שהתרחשו מבין n המאורעות הנתונים. (הערה: בכל הסכומים, \sum , המופיעים להלן, הטווח של האינדקס i הוא מ-1 עד n).

14. כאשר המאורעות הם זרים בזוגות ($A_i \cap A_j = \emptyset$ עבור $i \neq j$), השונות של S היא:
 (א) $\sum p_i - \sum p_i^2$ (ב) $\sum p_i - (\sum p_i)^2$ (ג) $\sum i^2 (p_i - p_{i-1}) - (\sum p_i)^2$ ($p_0 = 0$)

15. כאשר המאורעות הם בלתי תלויים, השונות של S היא:
 (א) כמו א' בשאלה 14 (ב) כמו ב' בשאלה 14 (ג) כמו ג' בשאלה 14

16. כאשר $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$, השונות של S היא:
 (א) כמו א' בשאלה 14 (ב) כמו ב' בשאלה 14 (ג) כמו ג' בשאלה 14

17. עבור $1 \leq k \leq n$, אי-השוויון $P(S \geq k) \leq \frac{1}{k} \sum p_i$ מתקיים
 (א) רק כאשר המאורעות הם בלתי תלויים (ב) רק כאשר הם זרים בזוגות (ג) תמיד

18. השוויון $P(S = 0) = 1 - \sum p_i$ מתקיים (לכל n ולכל p_1, \dots, p_n)
 (א) תמיד (ב) רק כאשר המאורעות זרים בזוגות (ג) רק כאשר $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$

19. כאשר המאורעות בלתי תלויים (להלן: ב"ת), ההסתברות $P(S = 0)$ שווה ל-:
 (א) $1 - p_1 p_2 \dots p_n$ (ב) $(1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$ (ג) $1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$

20. כאשר $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, ההתפלגות של S היא ההתפלגות הבינומית $B(n, p)$:
 (א) רק כאשר המאורעות ב"ת בזוגות (ב) רק כאשר הם ב"ת (באופן מלא) (ג) תמיד