

מבוא להסתברות

לתלמידי מחימטיקה שנה א'

המורים: פרופ' ס. הרט, ד"ר א. ליברמן

משך הבחינה: 3 שעות

בחינה 5 שאלות. יש לענות על כל השאלות.

יותר להשתמש בדף הנוסחאות שלך בלבד.

שאלה 1

X הוא משתנה מקרי המקבל את הערכים 0 ו-1.
 Y הוא משתנה מקרי המקבל את הערכים -1, 0 ו-1.

א. ידוע כי: $E(Y) = 0$, $V(Y) = 1/2$, $V(X) = 1/4$.
 מצא את פונקציות ההסתברות השוליות של X ושל Y .

ב. אם בנוסף לנתון ב-א) ידוע כי $P(X=Y=0) = 0$.
 מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y וחשב את $Cov(X, Y)$.

שאלה 2

א. הוכח כי:
$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

ב. מטילים קוביה סימטרית n פעמים. מהי ההסתברות שהופיעו בדיוק שתי תוצאות?

שאלה 3

ברכבת n קרונות. m נוסעים עולים לרכבת כאשר כל נוסע בוחר לו, באופן מקרי ובלתי תלוי באחרים, קרון לעלות עליו.

א. יהי X מספר הקרונות שנשארו ריקים. תוך שימוש במשתני אינדיקטור מתאימים, חשב את תוחלת X ואת שונותו.

ב. יהי Y מספר הקרונות שיש בהם לפחות נוסע אחד. חשב את תוחלת Y ואת שונותו.

שאלה 4

בכד a כדורים לבנים ו- b שחורים. שני אנשים מוציאים מהנד כדורים לפי התור עם החזרה. הראשון מוציא כדור לבן זוכה במשחק.

- א. מהי ההסתברות שהמתחיל במשחק יזכה.
ב. כעבור כמה הוצאות במוצע יסתיים המשחק.

שאלה 5

נתונים שני כדים שבכל אחד מהם כדורים לבנים ושחורים כאשר:

- הסיכוי להוציא כדור לבן מכד א' הוא p .
הסיכוי להוציא כדור לבן מכד ב' הוא q .

מוציאים כדורים מהנדים עם החזרה. בכל שלב, אם הוצא כדור לבן, הכדור הבא מוצא מאותו כד, בעוד שאם הוצא כדור שחור, הכדור הבא מוצא מהכד האחר. הכדור הראשון מוצא מכד א'.

- א. תהי α_n ההסתברות שהכדור ה- n הוצא מכד א'. הראה כי

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} (p+q-1) + (1-q)$$

- ב. הוכח כי

$$\alpha_n = \frac{1-q}{2-p-q} + \frac{1-p}{2-p-q} (p+q-1)^{n-1} \quad n=1,2,\dots$$

- ג. תהי P_n ההסתברות שהכדור ה- n שהוצא הוא לבן. חשב את P_n .

בהצלחה!!!