

מספר מחברת: _____

מספר ת.ז.: _____

**בחינה בקורס מבוא להסתברות
שנת תשע"ג, סמסטר א', מועד א'
מרצה: אילון סולן**

תאריך הבחינה: 5.2.2013.

מספר הקורס: 1102 – 0365.

זמן הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: מחשבון כיס, 4 (ארבעה) עמודי נוסחאות.

השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן. לכל שאלה ניתנות 4 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה שנראית לך נכונה. סימון התשובה הנכונה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת בכל שאלה.

יש לסמן את התשובות בדף המצורף לפי ההנחיות המופיעות בו; שימו לב: לכל תשובה יש לציין כן/לא. הבחינה תיבדק באופן אוטומטי. אנא עיקבו אחרי ההוראות בדף התשובות כדי למנוע בדיקה לא מדויקת ועוגמת נפש מיותרת.

בהצלחה!

שתי שאלות שאינן קשורות לסוגייה

1. יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים בעלי התפלגות ברנולי עם פרמטר p כאשר $0 < p < 1$. התוחלת המותנה $E[X + Y|XY]$

- (א) הינה משתנה מקרי שמקבל ערכים שלמים בלבד.
- (ב) הינה משתנה מקרי שעשוי לקבל ערך אחד או שני ערכים בהסתברות חיובית.
- (ג) הינה משתנה מקרי המקבל את הערך 0 בהסתברות p^2 .
- (ד) אף תשובה אינה נכונה.

2. יהיו (Ω_1, P_1) ו- (Ω_2, P_2) שני מרחבי ההסתברות הבאים:

$$\begin{aligned} & \bullet P_1(\omega_1^1) = P_1(\omega_2^1) = P_1(\omega_3^1) = \frac{1}{3}, \Omega_1 = \{\omega_1^1, \omega_2^1, \omega_3^1\} \\ & \bullet P_2(\omega_3^2) = \frac{3}{5}, P_2(\omega_1^2) = P_2(\omega_2^2) = \frac{1}{5}, \Omega_2 = \{\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2\} \end{aligned}$$

גודל מרחב ההסתברות הקטן ביותר שאיתו ניתן להגדיר צימוד בין (Ω_1, P_1) ו- (Ω_2, P_2) הוא:

- (א) 3.
- (ב) 6.
- (ג) 9.
- (ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוגייה ראשונה

על השולחן מסודרים בשורה 100 כדים. כמו כן מונחים על השולחן 100 כדורים הממוספרים מ-1 עד 100. פרנסואז מכניסה באופן אקראי את הכדורים לכדים; לכל כד היא מכניסה בדיוק כדור אחד. כל הסידורים האפשריים של הכדורים בכדים שווי הסתברות. לכל $i \in \{1, 2, \dots, 100\}$ נסמן ב- X_i את מספר הכדור הנמצא בכד i .

3. ההסתברות ש- $X_1 = X_2 + X_3$ שווה ל-

(א) $\cdot \frac{1}{196}$

(ב) $\cdot \frac{13}{4950}$

(ג) $\cdot \frac{1}{198}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

4. נסמן ב- Y את מספר הכדורים שמספרם גדול מ-50 הנמצאים ב-30 התאים הראשונים. ההתפלגות של Y היא

(א) היפרגיאומטרית.

(ב) בינומית.

(ג) אחידה.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

5. יהי $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$. ההסתברות שהכדורים ב- n הכדים הראשונים מסודרים בסדר עולה ובנוסף שהכדורים ב- $(100 - n)$ הכדים האחרונים מסודרים בסדר יורד היא:

(א) $\cdot \frac{\binom{100}{n}}{100!}$

(ב) $\cdot \frac{\sum_{k=1}^n \binom{100}{k} + \sum_{k=1}^{100-n} \binom{100}{k}}{100^{100}}$

(ג) $\cdot \frac{1}{2}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

6. כד נקרא מינימלי מקומי אם מספר הכדור שנמצא בו קטן ממספרי הכדורים הנמצאים בכד שמימינו ובכד שמאלו. בפרט, כדים מספר 1 ו-100 אינם יכולים להיות מינימליים מקומיים. ההסתברות ששום כד לא יהיה מינימלי מקומי היא:

(א) $\frac{2}{100!}$

(ב) $\frac{2^{100}}{100!}$

(ג) $\frac{2^{99}}{100!}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

7. תוחלת מספר הכדורים שנמצאים בין כדור מספר 1 לכדור מספר 2 היא:

(א) $32\frac{2}{3}$

(ב) 49

(ג) 50

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

8. שונות מספר הכדורים שנמצאים בין כדור מספר 1 לכדור מספר 2 היא:

(א) $285\frac{15}{18}$

(ב) $549\frac{8}{9}$

(ג) 2490.823

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוגייה שנייה

המשתנה המקרי התלת-ממדי (X_1, X_2, X_3) מקיים את התכונות הבאות:

- ההתפלגויות השוליות של X_1, X_2, X_3 שוות.
- $P(X_1 + X_2 + X_3 = 9) = P(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq 0) = 1$

9. מי מהאישויונים הבאים בהכרח מתקיים?

(א) $P(X_1 \leq 2) \leq \frac{6}{7}$

(ב) $P(X_1 > X_2) > 0$

(ג) $P(X_1 \geq 2) \leq \frac{2}{3}$

(ד) אף אחד מאישויונים אלו אינו מתקיים בהכרח.

10. השונות של המשתנה המקרי $X_1 + X_2 + X_3$ היא:

(א) 0.

(ב) 18.

(ג) אין די נתונים לענות על השאלה.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

11. ידוע כי השונות של X_3 חיובית. מקדם המתאם $\rho(X_1, X_2)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{2}$.

(ב) $-\frac{1}{2}$.

(ג) אין די נתונים לחשב גודל זה.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

ידוע כי $\text{Var}(X_3) = 4$ וכי X_3 מקבל ערכים שלמים בלבד. בכד יש X_1 כדורים אדומים, X_2 כדורים כחולים ו- X_3 כדורים ירוקים. מוציאים מהכד שני כדורים עם החזרה.

12. ההסתברות שהכדור הראשון אדום היא:

(א) $\frac{1}{3}$.

(ב) $\frac{3}{10}$.

(ג) אין די נתונים לחשב גודל זה.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

13. ההסתברות שצבעם של שני הכדורים שהוצאו שונה היא:

(א) $\frac{20}{81}$.

(ב) $\frac{42}{81}$.

(ג) $\frac{61}{81}$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

14. בשאלה זו $P(X_3 \geq 1) = 1$. ג'רום מוציא כדורים מהכד עם החזרה עד הפעם הראשונה שיוצא כדור אדום. תוחלת מספר הכדורים שג'רום מוציא היא:

(א) $E\left[\frac{9}{X_1}\right]$.

(ב) $\frac{9}{E[X_1]}$.

(ג) אין די נתונים לחשב גודל זה.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוגייה שלישית

נתון גרף מלא על קבוצה של n קדקודים ($n \geq 5$). יוצרים גרף מקרי על ידי מחיקת כל קשת בהסתברות $1 - p$ (והשארתה בהסתברות p).

קדקוד v בגרף נקרא **מבודד** אם שום קשת אינה יוצאת ממנו. זוג קדקודים $\{u, v\}$ בגרף נקרא **נשוי** אם הם מחוברים בקשת זה לזה ואין שום קשת נוספת היוצאת לא מ- u ולא מ- v (בנוסף לקשת המחברת ביניהם). כלומר, הקשת (u, v) לא נמחקה וכל הקשתות האחרות היוצאות מ- u כמו גם כל הקשתות האחרות היוצאות מ- v נמחקו.

נסמן ב- X את מספר הקדקודים המבודדים בגרף המקרי וב- Y את מספר זוגות הקדקודים הנשואים בגרף המקרי.

15. ההסתברות שהקדקודים 1 ו-2 נשואים וגם שקדקוד 4 הוא קדקוד מבודד היא:

(א) $p(1 - p)^{3n-9}$

(ב) $p(1 - p)^{3n-7}$

(ג) $p(1 - p)^{3n-5}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

16. ההסתברות המותנה שהקדקוד 5 הוא קדקוד מבודד בהינתן שהקדקוד 2 אינו נשוי היא:

(א) $\frac{(1-p)^{n-1} - (n-2)p(1-p)^{2n-5}}{1 - (n-1)p(1-p)^{2n-4}}$

(ב) $(1 - p)^{n-1}$

(ג) $\frac{(1-p)^{n-1} - (n-2)p(1-p)^{3n-7}}{1 - (n-1)p(1-p)^{2n-4}}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

17. התוחלת של Y היא:

(א) $p(1 - p)^{n-2} \binom{n}{2}$

(ב) $p(1 - p)^{2n-4} \binom{n}{2}$

(ג) $p(1 - p)^{2n-2} n^2$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

18. התוחלת המותנה של Y בהינתן שקדקודים 1 ו-2 נשואים היא:

(א) כמו התשובה לשאלה 16.

(ב) אחד ועוד התשובה לשאלה 16.

(ג) $1 + p(1-p)^{2n-8} \binom{n-2}{2}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

19. השונות המשותפת $\text{Cov}(X, Y)$ שווה ל:

(א) 0.

(ב) $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} p(1-p)^{3n-7} (1 - (1-p)^2)$

(ג) $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} p(1-p)^{3n-7} (1 - (1-p)^2) - n(n-1)p(1-p)^{3n-5}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

20. נניח כי $n = 20$ ו- $p = \frac{2}{3}$. לפי משפט הגבול המרכזי, ההסתברות q שבגרף המקרי יש בין 120 ל-130 קשתות מקיימת:

(א) $q \leq 0$

(ב) $0 < q < 0.4$

(ג) $0.4 \leq q \leq 0.7$

(ד) $0.7 < q \leq 1$