

## סמסטר א', מועד ב', תשע"ו, 4.8.2016

### בחינה ב"מבוא להסתברות" (מרצה: פרופ' רון פלד)

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון ללא יכולות תכנות, ציור גרפים או תקשורת.

השאלון מורכב משאלה פתוחה ומשאלות רבות ברירה.

יש לסמן את התשובות לשאלות רבות ברירה בטופס המצורף בלבד!

תשובה שגויה לשאלה רבת ברירה אינה מפחיתה ניקוד.

מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה רבת ברירה.

סה"כ ישנן 110 נקודות במבחן. אם צברת  $S$  נקודות, ציוןך  $\min(S, 100)$ .

בהצלחה!!!

## חלק א' – שאלה פתוחה – 26 נקודות

שמעון חובב אופנה ולכן החליט ביום הולדתו ה-25 שבכל שבוע יקנה לעצמו בגד חדש. מאז, בכל שבוע פועל שמעון, באופן בלתי תלוי בין השבועות, בצורה הבאה:

- בסיכוי  $\frac{1}{2}$  שמעון קונה חולצה חדשה.
- בסיכוי  $\frac{1}{3}$  שמעון קונה מכנס חדש.
- בסיכוי  $\frac{1}{6}$  שמעון קונה נעל חדשה.

עבור  $n \geq 1$ , נסמן ב- $X_n$  את כמות החולצות, ב- $Y_n$  את כמות המכנסיים וב- $Z_n$  את כמות הנעליים שקנה שמעון באופן זה לאחר בדיוק  $n$  שבועות (כך ש- $X_n + Y_n + Z_n = n$ ).

(א) (6 נק') עבור  $k \geq 1$ , רשמו נוסחה להסתברות  $P(X_{2k} = Y_{2k} + Z_{2k})$  (הכוונה לנוסחה סגורה, ללא שימוש בסכום).

(ב) (6 נק') עבור  $n \geq 1$ , חשבו את  $E(X_n - Y_n)$  ואת  $Var(X_n - Y_n)$ .

(ג) (7 נק') הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Y_n) = 1$ .

(ד) (7 נק') הסבירו מדוע  $2X_{450} + Y_{450} - 2Z_{450}$  הוא סכום של משתנים מקריים בלתי

תלויים ושווי התפלגות והשתמשו במשפט הגבול המרכזי כדי להעריך את

ההסתברות  $P(2X_{450} + Y_{450} - 2Z_{450} \geq 500)$ .

## חלק ב' – שאלות רבות ברירה – 7 נקודות לשאלה (סה"כ 84 נקודות)

### סוגיה ראשונה

כמות הלקוחות הנכנסים לסניף בנק ביום מתפלגת פואסונית עם פרמטר 120. כל לקוח מחליט בסיכוי  $\frac{1}{2}$  לגשת לבנקאי, בסיכוי  $\frac{1}{3}$  לגשת ליועץ או בסיכוי  $\frac{1}{6}$  לדבר עם המנהל (אנו מניחים שכל לקוח מבצע בדיוק אחת מפעולות אלה ושפעולות הלקוחות בלתי תלויות בכמות הלקוחות ובין לקוח ללקוח). נתמקד בכמות הלקוחות ביום מסוים.

- נסמן ב-  $X$  את כמות הלקוחות שנגשו לבנקאי ביום זה.
- נסמן ב-  $Y$  את כמות הלקוחות שנגשו ליועץ ביום זה.
- נסמן ב-  $Z$  את כמות הלקוחות שדברו עם המנהל ביום זה.

(1) למה שווה  $E(Y | X = 30)$ ?

- (א) 30
- (ב) 40
- (ג) 60
- (ד) אף תשובה אינה נכונה

(2) למה שווה  $Var(X - Y + Z)$ ?

- (א) 40
- (ב)  $\frac{220}{3}$
- (ג) 120
- (ד) אף תשובה אינה נכונה

(3) למה שווה  $Var(X | X + Y = 100)$ ?

- (א) 24
- (ב) 25
- (ג) 60
- (ד) אף תשובה אינה נכונה

### סוגיה שניה

מחמוד מטיל מטבע הוגן שוב ושוב, באופן בלתי תלוי, עד הפעם הראשונה בה מתקבל עץ. נסמן את מספר ההטלות של מחמוד ב- $X$ . אלון מטיל את המטבע שוב ושוב, באופן בלתי תלוי, עד הפעם הראשונה בה מתקבל פלי. נסמן את מספר ההטלות של אלון ב- $Y$ . כעת מחמוד ואלון מכינים טבלה ובה  $Y$  שורות ו- $X$  עמודות. עבור כל תא בטבלה, באופן בלתי תלוי, מחמוד מטיל את המטבע ואלון רושם את תוצאת ההטלה באותו תא. נסמן ב- $H$  את כמות העצים בטבלה וב- $T$  את כמות הפלים בטבלה.

(4) מה ההסתברות שכמות התאים בטבלה זוגית?

- (א)  $\frac{4}{9}$
- (ב)  $\frac{1}{2}$
- (ג)  $\frac{5}{9}$
- (ד) אף תשובה אינה נכונה

5) נסמן  $p = P(H > T | X = 3)$ . מה נכון לגבי  $p$ ?

(א)  $p \leq \frac{1}{3}$

(ב)  $\frac{1}{3} < p < \frac{1}{2}$

(ג)  $\frac{1}{2} \leq p < \frac{2}{3}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה

6) למה שווה  $E(H)$ ?

(א) 2

(ב) 3

(ג) 4

(ד) אף תשובה אינה נכונה

7) למה שווה  $Cov(H, XY)$ ?

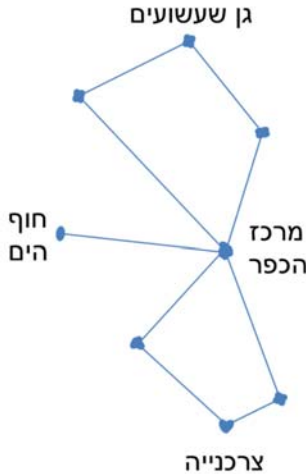
(א) 6

(ב) 8

(ג) 10

(ד) אף תשובה אינה נכונה

### סוגיה שלישית



מצורפת מפת הכפר "נוף ים" (כל קו ישר במפה מתאר שביל). יעל מחפשת בית ולכן מתחילה במרכז הכפר ומשוטטת באקראיות בשביליו באופן הבא: בכל דקה, בוחרת יעל את אחד השבילים היוצאים ממיקומה הנוכחי, בסיכוי שווה לכל אחד משבילים אלה, וצועדת בו עד סופו. נסמן ב- $X_t$  את מיקומה של יעל לאחר בדיוק  $t$  דקות (כך ש- $X_0$  הוא מרכז הכפר).

8) מהי ההסתברות שיעל תגיע לחוף הים לפני שתגיע לצרכנייה או לגן השעשועים?

(א)  $\frac{1}{3}$

(ב)  $\frac{2}{5}$

(ג)  $\frac{1}{2}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה

9) נסמן ב- $R_t$  את סך כמות הביקורים של יעל בחוף הים לאחר בדיוק  $t$  דקות.

כאשר  $t$  שואף לאינסוף, הכמות  $E\left(\frac{R_t}{t}\right)$ :

(א) מתכנסת ל- $\frac{1}{18}$

(ב) מתכנסת ל- $\frac{1}{9}$

(ג) מתכנסת ל- $\frac{1}{8}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה

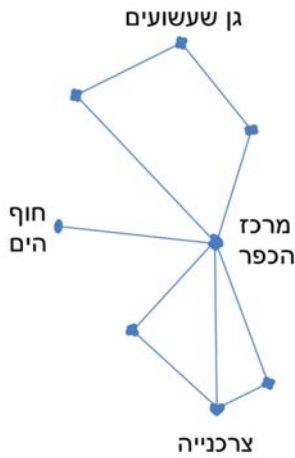
10) נסמן ב- $A_t$  את המאורע שלאחר בדיוק  $t$  דקות, יעל נמצאת בצרכנייה או בגן השעשועים. כאשר  $t$  שואף לאינסוף, ההסתברות  $P(A_t)$ :

(א) מתכנסת ל- $\frac{2}{9}$

(ב) מתכנסת ל- $\frac{1}{4}$

(ג) מתכנסת ל- $\frac{4}{9}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה



מועצת הכפר החליטה להוסיף קיצור דרך ב-"נוף ים" ע"י סלילת שביל המקשר באופן ישיר את מרכז הכפר עם הצרכנייה. מצורפת מפת "נוף ים" לאחר הוספת שביל זה. בשאלה הבאה נניח שיעל צועדת בכפר לאחר הוספת קיצור הדרך (עדיין נסמן את מיקום יעל לאחר בדיוק  $t$  דקות ב- $X_t$  ועדיין נניח ש- $X_0$  הוא מרכז הכפר).

11) נסמן ב- $B_t$  את המאורע שיעל צעדה בקיצור הדרך בדקה ה- $t$  (המאורע מתקיים בין אם יעל צעדה ממרכז הכפר לצרכנייה ובין אם צעדה מהצרכנייה למרכז הכפר).

כאשר  $t$  שואף לאינסוף, ההסתברות  $P(B_t)$ :

(א) מתכנסת ל- $\frac{1}{16}$

(ב) מתכנסת ל- $\frac{1}{10}$

(ג) מתכנסת ל- $\frac{1}{5}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה

## שאלה שאינה חלק מסוגיה

12) נתונה שרשרת מרקוב בעלת שתי התפלגויות סטציונריות שונות  $\pi_1, \pi_2$ . מזל מטילה מטבע הוגן כדי לקבוע את המצב ההתחלתי  $X_0$  של שרשרת המרקוב. אם תוצאת ההטלה עץ, מגרילה מזל את המצב ההתחלתי לפי ההתפלגות  $\pi_1$ . אם תוצאת ההטלה פלי, מגרילה מזל את המצב ההתחלתי לפי ההתפלגות  $\pi_2$ . כעת מקדמת מזל את שרשרת המרקוב מהמצב ההתחלתי שנבחר. נסמן את מצב השרשרת לאחר בדיוק  $t$  צעדים ב- $X_t$ .

יהי  $x$  מצב בשרשרת. כאשר  $t$  שואף לאינסוף, ההסתברות  $P(X_t = x)$ :

(א) בהכרח אינה מתכנסת

(ב) בהכרח מתכנסת

(ג) מתכנסת אם ורק אם  $\pi_1(x) = \pi_2(x)$

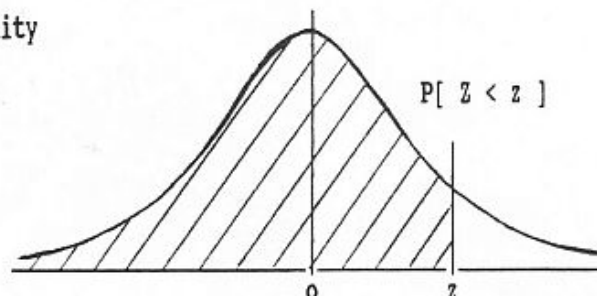
(ד) אף תשובה אינה נכונה

## STANDARD STATISTICAL TABLES

### 1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value  $z$  i.e.

$$P[ Z < z ] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2) dz$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000