

פתרון מקוצר לבחינה של פרופ' אסף נחמיאס מ 04/08/16

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
ג	ג	ד	א	א	ד	ב	ב	א	ד	ב	ג	א	ב	ג	תשובה

הסברים קצרים

שאלה 1

$$X \text{ הוא זוגי בסיכוי } \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5^3 + 0.5 \cdot 0.5^5 + \dots$$

Y הוא זוגי באותו סיכוי.

כדי שהמכפלה תהיה זוגית, צריך לפחות אחד מהם להיות זוגי. הסיכוי לכך הוא

$$1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$$

שאלה 2

עבור כל מספר של הטלות הסיכוי ש $(H > T)$ שווה לסיכוי ש $(T > H)$. אם Y אי זוגי, אז לא יתכן שיתקיים $(T = H)$. לכן בהינתן מקרים אלה הסיכוי שיתקיים $(H > T)$ הוא $\frac{1}{2}$. הסיכוי ש Y אי זוגי הוא $\frac{2}{3}$. גם במקרים ש Y זוגי יש הסתברות חיובית לכך ש $(H > T)$.

שאלה 3

מדובר על תוחלת סכום של XY אינדיקטורים בעלי הסתברות 0.5. בגלל האי תלות ובגלל שתוחלת של משתנה גיאומטרי שווה לאחד חלקי הפרמטר שלו, מתקיים

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

לפי תוחלת שלמה, תוחלת הסכום היא $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

שאלה 4

$$Cov(H, XY) = E(HXY) - E(H)E(XY)$$

$$E(H | XY = k) = 0.5k$$

$$E(HXY) = E(0.5X^2Y^2) = 0.5E(X^2)E(Y^2) =$$

$$= 0.5 \left[\left(\frac{1}{1/2} \right)^2 + \frac{0.5}{0.5^2} \right] \left[\left(\frac{1}{1/2} \right)^2 + \frac{0.5}{0.5^2} \right] = 18$$

(השתמשנו בכך ש $V(X) = \frac{0.5}{0.5^2}$ וש $E(X^2) = V(X) + E^2(X)$)

שאלה 5

מספרי הכדורים שנמצאים בתא הראשון בשלבים השונים מתוארים על-ידי שרשרת מרקוב שמטריצת המעבר שלה היא

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

יהיו e_i - תוחלת מספר הצעדים להגעה למצב 3 ממצב i .

$$\begin{cases} e_0 = 1 + 0.5e_0 + 0.5e_1 \\ e_1 = 1 + 0.25e_0 + 0.25e_1 + 0.5e_2 \\ e_2 = 1 + 0.5e_1 + 0.25e_2 + 0.25 \cdot 0 \\ e_3 = 1 + 0.5e_2 + 0.5 \cdot 0 \end{cases}$$

הערה

במחלקה בלתי פריקה תוחלת זמן החזרה למצב מעצמו שווה גם לאחד חלקי ההסתברות הסטציונרית שלו.

שאלה 6

משיקולי סימטריה התוחלת שווה לתוחלת זמן ההגעה למצב 3 ממצב 0 (ראו בשאלה הקודמת).

שאלה 7

זו שרשרת בלתי פריקה ולכן יש וקטור סטציונרי יחיד. זו שרשרת לא מחזורית ולכן ההסתברויות הגבוליות של מצב שווה להסתברות הסטציונרית שלו.

$$\begin{cases} \pi_0 = 0.5\pi_0 + 0.25\pi_1 \\ \pi_1 = 0.5\pi_0 + 0.25\pi_1 + 0.5\pi_2 \\ \pi_2 + 0.5\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.5\pi_3 \\ \pi_3 = 0.25\pi_2 + 0.5\pi_3 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

שאלה 8

מטריצת המעבר היא כעת

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

מצבים 0 ו 3 הם כעת חולפים. המחלקה {1,2} היא בלתי פריקה ובלתי מחזורית. ההסתברויות הסטציונריות של שני המצבים שבה שוות.

שאלה 9

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_1 = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \quad P(X_1 = 3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$E(X_1) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{9} \cdot 2 + \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{19}{9}$$

תוחלת מספר הרכיבים היא $3 = \frac{1+5}{2}$.

לפי תוחלת שלמה התוחלת המבוקשת היא $3 \cdot \frac{19}{9} = \frac{19}{3}$.

שאלה 10

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 1$$

שאלה 11

$$E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{81}) = 81 \cdot \frac{19}{9} = 171$$

$$V(Y_1) = \frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{2}{9} \cdot 2^2 + \frac{4}{9} \cdot 3^2 - \left(\frac{19}{9} \right)^2 = 0.765$$

$$V(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{81}) = 81 \cdot 0.765 = 62$$

$$P(161 \leq Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{81} \leq 181) \geq 1 - \frac{62}{11^2}$$

הערה

מכיון שמתקבלים רק ערכים שלמים, אז המשלים הוא שהסכום קטן או שווה ל 160 או גדול או שווה ל 182.

שאלה 12

מדובר על הסתברות המאורע שהממוצע הוא בין $\frac{161}{81}$ ל $\frac{181}{81}$.
תוחלת הממוצע היא $\frac{19}{9}$ וסטיית התקן שלו היא $\sqrt{\frac{0.765}{81}}$.

שאלה 13

פואסוני מפוצל הוא פואסוני.

שאלה 14

קעת כל אחד מבין מספר נתון הוא "עץ" או "פלי" באופן בלתי תלוי באחרים.

שאלה 15

זו תכונה של משתנה פואסוני מפוצל שיש אי תלות בין ערכי הפיצולים השונים. לכן התוחלת שווה לתוחלת המקורית שהיא $100 \cdot \frac{1}{2}$.

שלומי