

## בחינה במבוא להסתברות - סמסטר א', מועד א'

4.2.2016

מרצה: פרופ' אסף נחמיאס

- משך הבחינה הוא שלוש שעות.
- מותר להשתמש בשלושה דפי סיכום כתובים או מודפסים (דו צדדים) ובמחשבון ללא יכולת תכנות, ציור גרפים או תקשורת.
- השאלון מורכב מ-15 שאלות רבות ברירה. על כל תשובה נכונה יינתנו 7 נקודות.
- יש לסמן את התשובות בטופס המצורף בלבד! מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה.
- ישנן סה"כ 105 נקודות בבחינה. אם צברת S נקודות ציוןך הוא המינימום בין S לבין 100.
- בהצלחה!

### סוגיה ראשונה

מבצעים סדרה של  $n$  הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן (הסתברויות  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ). יהי  $X$  מספר ההצלחות.

1. בשימוש באי-שוויון צ'בישב, ה-  $n$  המינימלי כך ש-  $\mathbb{P}(|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{10}) \leq \frac{1}{16}$  הוא:

(א) 20

(ב) 40

(ג) 200

(ד) 400

2. בשימוש במשפט הגבול המרכזי עם ה-  $n$  משאלה 1, ההסתברות  $\mathbb{P}(|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{10})$  היא בקרוב:

(א) קטנה מ- 0.01

(ב) 0.023

(ג) 0.046

(ד) 0.069

3. הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{\sqrt{n}})$  הוא בקרוב:

(א) קטן מ- 0.01

(ב) בין 0.022 ל- 0.024

(ג) בין 0.045 ל- 0.047

(ד) בין 0.068 ל- 0.07

## סוגיה שנייה

שלושה קלפים המסומנים ב- 1, 2, 3 מונחים אחד על גבי השני לפי הסדר (כלומר, קלף 1 למעלה, מתחתיו קלף 2 ומתחתיו קלף 3). בכל סיבוב אנו בוחרים שני קלפים באקראי ומחליפים ביניהם.

4. מהי תוחלת מספר הסיבובים שיקח לקלף 1 להגיע למיקום התחתון ביותר?

(א) 2

(ב) 3

(ג) 4

(ד) 6

5. מה נכון לגבי ההסתברות שבסיבוב ה- $n$  הקלפים מסודרים בסדר הראשוני שלהם כאשר  $n$  שואף לאינסוף?

(א) שואפת ל- $\frac{1}{6}$

(ב) שואפת ל- $\frac{1}{3}$

(ג) שואפת ל- $\frac{1}{2}$

(ד) איננה מתכנסת.

6. כדי להאיץ את התהליך, בכל סיבוב נבצע שתי החלפות כאלו. כלומר, בכל סיבוב ראשית נבחר שני קלפים אקראיים ונחליף ביניהם, ומיד לאחר מכן נבחר עוד שני קלפים באקראי ונחליף ביניהם. מה נכון לגבי ההסתברות שבסיבוב ה- $n$  הקלפים מסודרים בסדר הראשוני שלהם כאשר  $n$  שואף לאינסוף?

(א) שואפת ל- $\frac{1}{6}$

(ב) שואפת ל- $\frac{1}{3}$

(ג) שואפת ל- $\frac{1}{2}$

(ד) איננה מתכנסת.

7. בשולחן מתקדם יותר בקזינו יש ארבעה קלפים המסומנים ב- 1, 2, 3, 4 המונחים אחד על גבי השני. בשולחן זה הדילר מרמה: בכל סיבוב הדילר בוחר שני קלפים ומציץ בהם בהסתר. אם אחד הקלפים מהזוג הוא 4, הדילר אינו מחליף ביניהם. אם צמד הקלפים איננו כולל את הקלף המסומן ב- 4, אז הדילר מחליף ביניהם. מה נכון לגבי ההסתברות שבסיבוב ה- $n$  הקלפים מסודרים בסדר הראשוני שלהם כאשר  $n$  שואף לאינסוף?

(א) שואפת ל- $\frac{1}{12}$

(ב) שואפת ל- $\frac{1}{6}$

(ג) שואפת ל- $\frac{1}{3}$

(ד) איננה מתכנסת.

### סוגיה שלישית

נתון כד עם 6 כדורים. 2 לבנים, 2 שחורים ו-2 אדומים. בכל שלב מוציאים באקראי כדור מהכד ומחזירים אותו לכד ביחד עם כדור נוסף בעל אותו צבע כמו זה שהוצא. נסמן ב- $W_k$  את מספר הכדורים הלבנים שהוצאו עד השלב ה- $k$  (כולל שלב  $k$ ), וב- $B_k$  את המספר הכדורים השחורים שהוצאו עד השלב ה- $k$  (כולל שלב  $k$ ).

8. מהי  $\mathbb{P}(W_2 - W_1 = 1 | W_3 = 1)$ ?

(א)  $\frac{1}{6}$

(ב)  $\frac{1}{3}$

(ג)  $\frac{1}{2}$

(ד) אף אחת מהנ"ל

9. מהי השונות המשותפת של  $W_1$  ו- $W_2$ ?

(א) 0

(ב)  $\frac{5}{18}$

(ג)  $\frac{16}{63}$

(ד) אף אחת מהנ"ל

10. מהי השונות של  $(W_k - B_k) - (W_{k-1} - B_{k-1})$ ?

(א)  $k$

(ב)  $\frac{k}{2}$

(ג)  $\frac{1}{3}$

(ד)  $\frac{2}{3}$

11. איזו מן הטענות הבאות נכונה לגבי המשתנה המקרי אשר סופר את מספר השלבים שנמתין עד אשר הוצא כדור אדום?

(א) המ"מ הוא בעל מומנט ראשון ושני

(ב) המ"מ אינו בעל מומנט ראשון ואינו בעל מומנט שני

(ג) המ"מ הוא בעל מומנט ראשון אך אינו בעל מומנט שני

(ד) המ"מ הוא בעל מומנט שני אך אינו בעל מומנט ראשון

### סוגיה רביעית

אוטובוס יוצא ללא נוסעים מהתחנה המרכזית. בכל תחנה  $i = 1, 2, 3, \dots$  עולים לאוטובוס  $X_i$  נוסעים, כאשר  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  הם משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים פואסון עם פרמטר 1. נניח שהנוסעים אינם יורדים מהאוטובוס בתחנות הביניים. נסמן  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  את מספר הנוסעים שעלו לאוטובוס עד וכולל תחנה  $n$ . נגדיר לכל מספר שלם  $k \geq 0$  את המשתנה המקרי  $N_k = \min \{n : S_n > k\}$ .

12. מה ניתן להגיד על ההסתברות  $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \geq 1)$  כש-  $n$  שואף לאינסוף?

(א) שואפת ל- 0

(ב) שואפת ל-  $\frac{1}{2}$

(ג) הסדרה אינה מתכנסת

(ד) אף אחת מהנ"ל

13. מהי ההסתברות ש-  $N_1 \geq 2$ ?

(א)  $e^{-1}$

(ב)  $(2.5)e^{-1}$

(ג)  $(0.5)e^{-1}$

(ד) אף אחת מהנ"ל

14. מהי  $\mathbb{E}[N_1 | N_0]$ ?

(א)  $N_0 + \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$

(ב)  $N_0 + \frac{1}{1-e^{-1}}$

(ג)  $N_0 + \frac{1}{(1+e^{-1})^2}$

(ד) אף אחת מהנ"ל

15. מה ניתן להגיד על ההסתברות  $\mathbb{P}(\frac{N_k}{k} \geq 2)$  כש-  $k$  שואף לאינסוף?

(א) שואפת ל- 0.159 בקרוב

(ב) שואפת ל- 0.841 בקרוב

(ג) שואפת ל- 0

(ד) שואפת ל-  $2e^{-1}$

## Tables of the Normal Distribution



### Probability Content from $-\infty$ to $Z$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990