

סמסטר א' מועד א' תשס"ג
תאריך הבחינה: 4.2.2003

בחינה במבוא להסתברות
המורים: פרופ' דוד גילת, פרופ' יצחק מלכסון

- משך הבחינה: שלוש שעות
- מותר להשתמש בסיכום אישי בהיקף של עד 2 דפים ובמחשב כיס
- השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. ענה על כולן.
- לכל שאלה (פרט לסוגיה III) ניתנות 4 תשובות שאחת ורק אחת מהן נכונה. סימון התשובה הנכונה (במקום המתאים בגוף השאלון ובטבלה שבתחתית עמוד זה) מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה. ההוראות לגבי סוגיה III מופיעות בראש הסוגיה.
- הצובר N נקודות יקבל את הציון $\min(100, \max(N, 0))$.

בהצלחה!

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| א | | | | | | | | | | |
| ב | | | | | | | | | | |
| ג | | | | | | | | | | |
| ד | | | | | | | | | | |

11

12

13

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| א | | | | | |
| ב | | | | | |
| ג | | | | | |
| ד | | | | | |

סוגיה I

X משתנה מקרי עם תוחלת 0.2 ושונות 40 (ארבעים). S הוא סכום של 1000 מ"מ ב"ת המתפלגים כל אחד כמו X .

1. ההסתברות לכך ש- S שלילי היא בקירוב

א. $1 - \Phi(1) = 0.1587$

ב. $\Phi(1) = 0.8413$

ג. $\Phi(0) = 0.5$

ד. $2(1 - \Phi(1)) = 0.3174$

כש- $\Phi(z)$ השטח מתחת לצפיפות הנורמלית בין $-\infty$ ו- z .

2. T בעל התפלגות סימטרית עם תוחלת ושונות שוות בהתאמה לאלה של S . ההסתברות לכך ש- T שלילי היא לכל היותר (בחר את התשובה הנכונה האינפורמטיבית יותר).

א. $1/2$

ב. $1/4$

ג. $1/8$

ד. $1/16$

3. X בעל התפלגות $Bin(n, P)$. ההסתברות $P(X = 6)$

א. שואפת לאפס כש- $P = \frac{1}{n}$ ו- n שואף לאינסוף.

ב. שווה $\frac{1}{\sqrt{6\pi}}$ כאשר $n=12$ ו- $P = \frac{1}{2}$.

ג. שואפת ל- $\frac{1}{720e}$ כש- $P = \frac{1}{n}$ ו- n שואף לאינסוף.

ד. שואפת ל- $\frac{1}{720} \left(\frac{6}{e}\right)^6$ כש- $P = \frac{1}{n}$ ו- n שואף לאינסוף.

4. אם A ו- B מאורעות זרים בעלי הסתברות חיובית, אז האינדקטורים I_A ו- I_B בעלי

מקדם מתאם

א. אפס

ב. חיובי

ג. שלילי

ד. לא ניתן לקבוע

5. מטבע עם $P(H) = p \in (0,1)$ מוטל שוב ושוב באופן ב"ת עד שלראשונה מקבלים

שלושה H ים עוקבים. יהי X מספר ההטלות. בחר הטיעון הנכון.

א. $P(X = 3) > P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6)$

ב. $P(X = 3) > P(X = 4) > P(X = 5) > P(X = 6)$

ג. $P(X = 3) > P(X = 4) = P(X = 5) > P(X = 6)$

ד. התשובה תלויה בערכו של p .

סוגיה II

6. בסדרת הטלות בלתי תלויות של קוביה הוגנת, הסיכוי שאחת משתי הפאות 5 או 6 תופיע לפני שהופיעה הפאה 1 הוא

א. $1/3$

ב. $1/2$

ג. $2/3$

ד. $8/11$

אתה משתתפת/ת במשחק הבא: מתבצעת סדרת הטלות ב"ית של קוביה הוגנת: ברגע שמופיעה הפאה 1, המשחק נגמר ואתה זוכה בפרס כספי בסך 1 ₪, אבל מותר לך לעצור את המשחק אחרי כל הטלה קודמת ולזכות בפרס כספי בסך שקלים שווה למספר על הפאה שהתקבלה בהטלה האחרונה (לרבות המקרה שנכפתה עליך הפאה 1).

עבור $k = 1, 2, \dots, 6$, יהי τ_k כלל העצירה המורה לעצור בפעם הראשונה שהופיעה פאה שמספרה 1 או לפחות k .

7. אם החלטת להשתמש בכלל העצירה τ_4 , תוחלת הפרס שלך (בשקלים) היא

א. $7/8$

ב. 4

ג. $9/2$

ד. אין די נתונים לחישוב התוחלת המבוקשת.

8. תהי m_k תוחלת גודל הפרס המושג כאשר משתמשים בכלל העצירה τ_k .

א. $m_3 = m_4$

ב. $m_3 < m_4$

ג. $m_3 > m_4$

ה. אי אפשר לקבוע

מאחר שאין ארוחות חינם, אתה מתבקש/ת לשלם 1 ₪ עבור כל הטלה של הקוביה.

9. תוחלת הרווח (גודל הפרס פחות התשלום עבור הטלות הקוביה) כאשר משתמשים בכלל

העצירה τ_3 היא

א. 2

ב. $5/2$

ג. $13/5$

ד. 3

10. תהי M_k תוחלת הרווח כאשר משתמשים בכלל העצירה τ_k . אז

א. $M_3 = M_4$

ב. $M_3 < M_4$

ג. $M_3 > M_4$

ד. אי אפשר לקבוע

סוגיה III

יש לתת תשובה מספרית ופורמלית (ביטוי מספרי שיכול להכיל מקדמים בינומיים ועצרות) במשבצת המתאימה בדף התשובות. את/ה יכול/ה להיעזר בדף זה לצורך החשבונות.

חפיסת קלפים מכילה 52 קלפים, בכל הקומבינציות של 13 מספרים ו-4 צורות. בוחרים באקראי n קלפים מן החפיסה, ללא החזרה.

11. עבור $n = 4$, חשבי את ההסתברות שכל ארבעת הצורות יופיעו.

12. עבור $n = 8$, חשבי את ההסתברות ששמונת המספרים שונים.

13. עבור $n = 15$, חשבי את ההסתברות שכל 13 המספרים יופיעו.

סוגיה IV

נתון זוג מ"מ X, Y שעבורם $E(Y|X) = 2 - X$.

14. אם $E(Y) = 3$, אז $E(X)$ הוא

א. 1

ב. 0

ג. -1

ד. הנתונים אינם מספיקים לחישוב $E(X)$.

15. אם בנוסף לנתון בשאלה הקודמת ידוע שסטיית התקן של Y גדולה פי 2 מסטיית התקן של X , אז מקדם המתאם $\rho(X, Y)$ הוא

א. $-1/2$

ב. $-1/3$

ג. $1/3$

ד. הנתונים אינם מספיקים לקביעת ρ .

16. תוחלת ריבוע השגיאה (MSE) של $E(Y|X)$ כתחזית של Y היא

א. $1/2$

ב. $3/4$

ג. 1

ד. לקביעת ה- MSE דרושה השונות של Y .

17. אם בנוסף לכל הנתונים הנ"ל ידוע גם שהתוחלת המותנה $E(X|Y)$ היא פונקציה

ליניארית של Y שנסמנה ב- $L(Y)$, אזי $L(Y)$ ניתנת על ידי

א. $Y - 4$

ב. $4 - Y$

ג. $-\frac{1}{4}(Y + 1)$

ד. $2\left(Y - \frac{7}{2}\right)$

18. תהי a תוחלת ריבוע השגיאה של $E(Y|X)$ כתחזית של Y (על סמך X) ותהי b

תוחלת ריבוע השגיאה של $E(X|Y)$ כתחזית של X (על סמך Y). בנתונים של שאלות

14, 15 ו-17 בסוגיה זו

א. a גדול פי 4 מ- b

ב. a גדול פי 2 מ- b

ג. a קטן פי 4 מ- b

ד. a קטן פי 2 מ- b

בהצלחה!