

מבחן ב"מבוא להסתברות"

פרופ' אורי ליברמן

מועד א', סמסטר ב'

3 ביולי, 2007

לנבחנים

1. בבחינה חמש שאלות שוות משקל
2. יש לענות על כל השאלות
3. הזמן העומד לרשותכם הוא 3 שעות.
4. אין להשתמש בחומר עזר פרט לטבלה המצורפת

בהצלחה!

שאלה 1

A, B ו- C הם שלושה מאורעות בעלי אותה הסתברות, p . ידוע כי הם בלתי תלויים בזוגות אך אירועם המשותף, $A \cap B \cap C$, הוא בלתי אפשרי.

- א. חשבו את ההסתברות שלא יקרה אף אחד מהמאורעות A, B, C .
- ב. חשבו את ההסתברות ש- A לא קרה אם ידוע שגם B וגם C לא קרו.
- ג. חשבו את ההסתברות שיקרה לכל היותר אחד מהמאורעות A, B, C .

שאלה 2

לגבי שופט המתמחה בעבירות מרמה ידועים הנתונים הבאים:
הסיכוי שאדם שהוא רמאי יימצא "אשם" על ידי השופט הוא 0.7
הסיכוי שאדם שהוא חף מפשע יימצא "אשם" על ידי השופט הוא 0.2
במהלך השנה הובאו בפני שופט זה מספר רב של עבריינים, חלקם רמאים וחלקם חפים מפשע והתברר כי בסך הכל הוא פסק לגבי 60% מהם שהם "אשמים".

- א. מבין העבריינים שהובאו למשפט בפני שופט זה, מהו אחוז העבריינים שהם רמאים?
- ב. אם עברייני נמצא "אשם" על ידי שופט זה, מה הסיכוי שהוא חף מפשע?
- ג. עברייני כלשהו מובא לפני השופט הזה. מה הסיכוי שהשופט יטעה בפסיקתו?

שאלה 3

מספר הפונים למגן דוד אדום בנתב"ג (נמל התעופה בן-גוריון) מפולג לפי תהליך פואסוני עם 48 פונים בממוצע ליממה (24 שעות).

- א. מהי ההסתברות שהפניה הראשונה לתחנה הייתה לפחות 3 שעות לאחר פתיחתה?
- ב. אם ידוע כי ביממה היו 50 פניות, מה ההסתברות שב-12 שעות היום היו בדיוק 30 פניות?
- ג. התחנה מופעלת על ידי קבלן חיצוני המקבל מרשות שדות התעופה סכום קבוע של A ₪ לחודש וכן תוספת של a ₪ לכל פניה בשעות היום ועוד b ₪ לכל פניה בשעות הלילה. מהי התוחלת ומהי השונות של הסכום S אותו מקבל הקבלן במהלך חודש (30 יום)?

שאלה 4

לגבי זוג הורים מסוים ידוע כי הסיכוי שבלידה מסוימת ייוולד להם בן הוא p וזאת באופן בלתי תלוי בלידות אחרות. זוג ההורים החליט על המדיניות הבאה:

הוא יולד ילדים עד שלראשונה יהיו לו ילדים משני המינים אך לא יולד יותר מ-4 ילדים.

יהיו: X – מספר הילדים שנולדו לזוג

Y – מספר הבנים שנולדו לזוג

א. מצאו את ההתפלגות המשותפת של (X, Y) ואת ההתפלגויות השוליות של X ושל Y .

ב. האם X ו- Y בלתי תלויים?

ג. חשבו את $\text{COV}(X, Y)$ כאשר $p = 1/2$.

שאלה 5

במסיבה משתתפים N זוגות נשואים (סך הכל $2N$ משתתפים). במהלך הערב בחר המארח באופן מקרי $2k$ מהמשתתפים למשחק חברתי.

יהיו:

X – מספר הזוגות הנשואים בין $2k$ המשתתפים במשחק

Y_i – משתנה אינדיקציה המציין אם הזוג מספר i השתתף במשחק עבור $i = 1, 2, \dots, N$.

א. מהי ההתפלגות של X (ערכים והסתברויות)?

ב. מהם $E(Y_i)$ ו- $V(Y_i)$ עבור כל $i = 1, 2, \dots, N$?

ג. חשבו את $E(X)$ ו- $V(X)$.

התפלגויות בדידות מיוחדות

שם ההתפלגות	סימון	ערכים אפשריים של המ"מ	פונקציית ההסתברות $P(X=k)$	תוחלת $E(X)$	שונות $V(X)$
אחידה	$X \sim U[a, b]$	$a, a+1, \dots, b$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
בינומית	$X \sim B(n, p)$	$0, 1, \dots, n$	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$	$n \cdot p$	$np(1-p)$
גיאומטרית	$X \sim G(p)$	$1, 2, \dots$	$(1-p)^{k-1} \cdot p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
בינומית שלילית	$X \sim NB(r, p)$	$r, r+1, \dots$	$\binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r \cdot (1-p)}{p^2}$
היפרגאומטרית	$X \sim H(N, D, n)$	$\max\{0, n-(N-D)\}, \dots, \min(n, D)$	$\binom{D}{k} \cdot \binom{N-D}{n-k} / \binom{N}{n}$	$\frac{D}{N} \cdot n$	$\frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
פואסונית	$X \sim P(\lambda)$ $\lambda > 0$	$0, 1, 2, \dots$	$e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ