

סמסטר ב', מועד א', תשנ"ז  
תאריך הבחינה: 1.7.97

**הבחינה: מבוא להסתברות**  
**המורה: פרופ' יצחק מלכסון**

משך הבחינה: שלוש וחצי שעות.  
מותר להיעזר בדפי סיכום אישיים בודדים ובמחשבון, אך לא בספרים או כל חומר  
מודפס אחר.  
יש לענות בגוף המבחן, תוך שימוש בדף השאלה ובדף הריק הבא אחריו (במידת  
הצורך).  
במבחן 13 סעיפים. כל סעיף נושא 10 נקודות, ושלושת ציוני הסעיפים הנמוכים  
ביותר לא יילקחו בחשבון.

ב ה צ ל ה ה !!!!

1. יהיו נתונים ניסויים בלתי תלויים ושווי סיכוי  $p$  להצלחה. יהי  $X_i$  האינדיקטור של "הצלחה בניסוי ה- $i$ " ויהי  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  מספר ההצלחות ב- $n$  הניסויים הראשונים. יהי  $Y_i$  (עבור  $i \geq 2$ ) האינדיקטור של המאורע  $\{X_i = X_{i-1}\}$ .

א. עבור  $0 < n < N$  ו- $0 < k < N$ , זהה את ההתפלגות המותנית של  $S_n$  בהינתן ש- $S_N = k$ , את תוחלתה ושוונתה.

ב. בדוק לכל  $0 < p < 1$  האם  $Y_2$  ו- $Y_3$  בלתי תלויים.

ג. יהיו  $N_1 = \min \{n \geq 1 \mid X_n = 1\}$  ו- $N_2 = \min \{n \mid n > N_1, X_n = 1\}$  ההטלות בהן התקבלו שתי ההצלחות הראשונות. זהה את התפלגויות  $N_1$  ו- $N_2$  ואת ההתפלגות המותנית של  $N_1$  בהנתן  $N_2$ .

ד. יהי  $M = \min \{n \geq 2 \mid X_{n-1} = 1, X_n = 1\}$  מספר הניסויים עד שלראשונה מקבלים רצף של שתי הצלחות. חשב את תוחלת ושוונת  $M$ .

2. לזוג משתנים מקריים  $X$  ו- $Y$  המוגדרים על איזשהו מרחב הסתברות יש תוחלות  $E(X) = 10$ ,  $E(Y) = 3$  ושונויות  $\text{Var}(X) = 4$ ,  $\text{Var}(Y) = 25$ .

א. מה הערך המכסימלי האפשרי של  $\text{Cov}(X, Y)$  ומה המינימלי? האם כל ערך ביניהם הוא אפשרי? נמק.

ב. בנה דוגמא להתפלגות משותפת של זוג  $(X, Y)$  עם נתונים שוליים כנ"ל ו- $\text{Cov}(X, Y) = 3$ .

ג. יהיו  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_{15}, Y_{15})$  זוגות בלתי תלויים ושווי התפלגות משותפת דו-ממדית עם נתוני סעיף ב. השב את מקדם המתאם בין  $\sum_{i=1}^{10} X_i$  ו- $\sum_{j=1}^{15} Y_j$ .

הערה: ניתן לפתור כל סעיף בלי לפתור את השניים האחרים, אבל סעיף ג. יזכה בניקוד מופחת אם לא ברור מן התשובות שקו-ווריאנס 3 בין  $X$  ו- $Y$  הוא אפשרי.

3. להלן כללי משחק ה-Craps : מטילים שתי קוביות הוגנות. יהי  $T$  סכום שתי התוצאות. אם  $T$  הוא 2, 3 או 12 - המהמר מפסיד. אם הוא 7 או 11 - המהמר זוכה. אחרת, שתי הקוביות מוטלות שוב ושוב עד שלראשונה סכום שתי התוצאות בהן הוא 7 (או המהמר זוכה) או שווה ל- $T$  (או המהמר מפסיד).

א. חשב את סיכוי ההצלחה במשחק ה-Craps .

ב. חשב את תוחלת מספר הקוביות המוטלות בו עד לגמר המשחק.

4. מסדרים באקראי בשורה ששה עצמים, שלושה מהם אדומים, שלושה שחורים ושלושה ירוקים, כאשר בכל צבע עצם קטן ועצם גדול. יהי  $R$  (בהתאמה,  $G$ ) מספר העצמים האדומים (בהתאמה, ירוקים) בשני המקומות הראשונים בשורה, ויהי  $C$  מספר הצבעים כך ששני העצמים בצבע זה מופיעים בשורה זה ליד זה. חשב

א. הסיכוי לכך שבשני המקומות הראשונים בשורה עצמים שווי צבע.

ב. הסיכוי לכך שאין בשורה עצם ליד עצם באותו צבע.

ג.  $E(B)$ ,  $E(B - G)$ ,  $E(B - G)$ ,  $E(C)$ ,  $\rho(B, G)$ .

5. שלישי ממכשירי הטלפון הם מסוג בעל שיעור הצלחה בחיוג של 90% והיתר מסוג בעל הצלחה בחיוג של 80%, כולם זהים במראה. במכשיר הנבחר באקראי, המשתמש טעה בחיוג פעם אחת בעשר השיחות הראשונות. בהינתן מידע זה,

א. מה הסיכוי שיטעה בחיוג הבא?

ב. מה הסיכוי שבידיו מכשיר מן הסוג בראשון?