מבוא להסתברות/ פתרון תרגיל 12

שאלה 1

פתרון בדרך ראשונה

יהי X_i מספר הפעמים שמתקבלת תוצאה i. מבוקש $r(X_3,X_6)=\frac{COV(X_3,X_6)}{\sqrt{V(X_3)V(X_6)}}$

מתקיים $X_1+X_2+X_4+X_5+X_6=5-X_3$.

מתקיים $COV(X_3,5-X_3)=COV(X_3,5)-COV(X_3,X_3)=0-V(X_3)=-V(X_3)$

$$COV(X_3,X_1+X_2+X_4+X_5+X_6)=$$
$$=COV(X_3,X_1)+COV(X_3,X_2)+COV(X_3,X_4)+COV(X_3,X_5)+COV(X_3,X_6)$$

משיקולי סימטריה זה שווה ל $5COV(X_3,X_6)$ לכן $COV(X_3,X_6)=-\frac{1}{5}V(X_3)$

מתקיים $V(X_3)=V(X_6)$ לכן $r(X_3,X_6)=\frac{COV(X_3,X_6)}{\sqrt{V(X_3)V(X_6)}}=\frac{-\frac{1}{5}V(X_3)}{V(X_3)}=-\frac{1}{5}$.

פתרון בדרך שנייה

$$X_3\sim B\left(5,\frac{1}{6}\right)\quad,\quad X_6\sim B\left(5,\frac{1}{6}\right)\quad,\quad X_3+X_6\sim B\left(5,\frac{2}{6}\right)$$

$$V(X_3)=V(X_6)=5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}\quad,\quad V(X_3+X_6)=5\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{40}{36}$$

$$V(X_3+X_6)=V(X_3)+V(X_6)+2\cdot COV(X_3,X_6)$$

לכן $COV(X_3,X_6)=\frac{V(X_3+X_6)-V(X_3)-V(V_6)}{2}=\frac{\frac{40}{36}-\frac{25}{36}-\frac{25}{36}}{2}=-\frac{5}{36}$

$$r(X_3,X_6)=\frac{COV(X_3,X_6)}{\sqrt{V(X_3)V(X_6)}}=\frac{-\frac{5}{36}}{\sqrt{\frac{25}{36}\cdot\frac{25}{36}}}=-\frac{1}{5}$$

פתרון בדרך שלישית

X_3 הוא סכום של 5 אינדיקטורים שכל אחד מהם מצביע על קבלת תוצאה 3 בהטלה מסוימת.

X_6 הוא סכום של 5 אינדיקטורים שכל אחד מהם מצביע על קבלת תוצאה 6 בהטלה מסוימת.

$$X_3=\sum_{i=1}^{5}X_{3,i}\quad X_6=\sum_{j=1}^{5}X_{6,j}\ ,$$

$$COV(X_3,X_6)=COV\left(\sum_{i=1}^{5}X_{3,i},\sum_{j=1}^{5}X_{6,j}\right)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}COV\left(X_{3,i},X_{6,j}\right)$$

אך עבור כל $i\neq j$: $X_{3,i}$ ב"ת ב $X_{6,j}$ כי מדובר בהטלות שונות.

לכן הביטוי שווה ל $\sum_{i=1}^{5}COV\left(X_{3,i},X_{6,i}\right)$. משיקולי סימטריה זה שווה ל $5\cdot COV\left(X_{3,1},X_{6,1}\right)$.

$$COV(X_{3,1}, X_{6,1}) = E(X_{3,1}X_{6,1}) - E(X_{3,1})E(X_{6,1}) = 0 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = -\frac{1}{36}$$

(לא יתכן שסימולטנית שני האינדיקטורים $X_{3,1}$ ו $X_{6,1}$ יהיו הצלחה כי לא יתכן שבאותה הטלה יתקבל גם 3 וגם 6 .)

לכן $COV(X_3, X_6) = -\frac{5}{36}$.

X_3 ו X_6 הם כל אחד משתנה $B\left(6, \frac{1}{6}\right)$. לכן $V(X_3) = V(X_6) = 5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$.

$$r(X_3, X_6) = \frac{-\frac{5}{36}}{\sqrt{5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}} = -\frac{1}{5}$$

<u>שאלה 2</u>

לא.

$$E(X) = \sum P(X=k)k = 0.2\cdot 5 + 0.1\cdot 10 + \sum_{k\neq 5,10} P(X=k)k = 2 + \sum_{k\neq 5,10} P(X=k)k$$

אך מכיון ש $P(X=5) + P(X=10) < 1$ ומכיון שמתקבלים רק ערכים חיובים ממש אז הסכום כולו גדול מ 2 וזאת סתירה.

<u>שאלה 3</u>

לא.

אם $E(X) = 4$ ויש סטייה של $9 - 4 = 5$ בסיכוי $\frac{1}{2}$, אז בסיכוי $\frac{1}{2}$ רבוע הסטייה הוא 25. לכן ממוצע רבוע הסטייה הוא לפחות $\frac{1}{2}\cdot 25 = 12.5$ ולכן השונות גדולה מ 5 וזאת סתירה.

לפי אי שיוויון צ'בישב: $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{(a - E(X))^2}$ שאומר כאן

$$P(|X-4| \geq 5) \leq \frac{5}{(9-4)^2} = \frac{1}{5}$$

לכן לא יתכן שיתקיים $P(X=9) = 0.5$.

<u>שאלה 4</u>

<u>א</u>. מתקיים $P(X=k) = pq^{k-1} + qp^{k-1}$ עבור כל $k \geq 2$ שלם.

(או שעד השלב ה- $k-1$ היה הכל "פלי" ואז קבלנו "עץ" או שעד השלב ה- $k-1$ היה הכל "עץ" ואז בשלב ה- k היה "פלי".)

<u>ב</u>. בכל מקרה לאחר ההטלה הראשונה מקבלים זמן המתפלג $G(0.5)$. יש כאן משתנה שהוא הזזה של משתנה $G(0.5)$. לכן השונות שווה לשונות של משתנה $G(0.5)$ והיא שווה ל $\frac{0.5}{0.5^2} = 2$.

פתרון לשאלות נוספות

שאלה

כדי לעלות לקומה ב' יש לעלות 49 מדרגות. בכל דקה שירלי מטילה קוביה תקינה ועולה מספר מדרגות השווה לתוצאת הקוביה.

מצאו חסם עליון להסתברות ששירלי תגיע לקומה ב' תוך 12 דקות.

הניחו שההטלות השונות הן ב"ת.

פתרון

יהי X_i - התוצאה בדקה ה- i .

צריך למצוא חסם עליון להסתברות $P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i \geq 49\right)$ כאשר $X_i \sim U(1,6)$.

לכל i : $E(X_i) = \frac{1+6}{2} = 3.5$, $V(X_i) = \frac{(6-1+1)^2 - 1}{12} = \frac{35}{12}$.

$$E\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right) = 12 \cdot 3.5 = 42$$

הודות לאי תלות בין ההטלות ולכך שלכולן יש את אותה התפלגות נקבל:

$$V\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right) = 12V(X_1) = 12 \cdot \frac{12}{35} = 35$$

לפי אי שיוויון צ'בישב:

$$P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i \geq 49\right) \leq \frac{V\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right)}{(49-42)^2} = \frac{35}{(49-42)^2} = \frac{5}{7}$$

מכיון שסכום תוצאות הקוביות הוא סימטרי סביב תוחלתו אז ניתן לחלק את החסם ב 2 ולקבל חסם עליון: $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{14}$.

שאלה

פרופורצית המכשירים המקולקלים היא p . לא ידוע מהו p , אך ידוע שיש אי תלות בין מכשירים שונים. רוצים להעריך את ערכו של p . רוצים שבסיכוי 0.99 לא תהיה טעות של יותר מ 0.02 בחיזוי ערכו של p לפי ממוצע המדגם.

פתרון

מכשיר בודד מקולקל בסיכוי p ולכן שונות האינדיקטור שלו היא $p(1-p)$. שונות סכום של n אינדיקטורים היא $np(1-p)$. יהי $\sum_{i=1}^{n} X_i$ סכום האינדיקטורים. יהי $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ הממוצע של n האינדיקטורים.

מתקיים:

$$V\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum X_i\right) \overset{I}{=} \frac{1}{n^2} \sum V(X_i) \overset{II}{=} \frac{1}{n^2} \cdot nV(X_1) = \frac{p(1-p)}{n}$$

I. הודות לאי תלות, שונות הסכום שווה לסכום השונויות.

II. המשתנים הם ב"ת, לכן לכל אחד מהם יש שונות כמו של X_1.

לא ידוע p, אך ידוע שעבור כל $0 \le p \le 1$ מתקיים $p(1-p) \le \frac{1}{4}$. לכן $V\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) \le \frac{1}{4n}$.

לפי אי-שיוויון צ'בישב:

$$P\left(\left|\frac{\sum X_i}{n} - p\right| \ge 0.02\right) \le V\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) / 0.02^2$$

צריך לדאוג שיתקיים:

$$V\left(\sum X_i / n\right) / 0.02^2 \le 1 - 0.99 = 0.01$$

לכן $\frac{2500}{4n} \le 0.01$ ולכן $n \ge 62500$.

<u>הערה</u>

שימו לב שקבלנו חסם על-פי אי שיוויון צ'בישב. כבר ראינו שהחסמים המתקבלים הם לא תמיד אופטימלים.

שלומי