

בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
 מותר לכל תלמיד להשתמש בדף A4 אחד הכתוב משני צדדיו. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים.
 מותר להשתמש במחשב כיס.
 בבחינה יש 3 שאלות. ענו על כל השאלות.
 משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.
 ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות. הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
 אנא, השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.
 נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות)

יהיו X ו Y זוג משתנים מקריים בעלי התפלגות משותפת המתוארת בטבלה הבאה

$Y \backslash X$	0	2	3	P_X
1	0.1	0	0.2	0.3
2	0	0.3	0.4	0.7
P_Y	0.1	0.3	0.6	

- א. מהי ההתפלגות של Y בהינתן $(X=1)$?
ב. יהי $Z = X + Y$ משתנה מקרי המוגדר לפי $Z = X + Y$.
 מהי ההתפלגות המשותפת של X ו Z ?

שאלה 2 (30 נקודות)

יהיו X, Y, Z, W ארבעה משתנים מקריים שווי התפלגות. נניח ש $X \sim \text{Bin}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
 לא ידועה ההתפלגות המשותפת שלהם, אך ידוע שלכל זוג מהם יש אותה התפלגות משותפת.

- א. האם יתכן ש $P(X + Y = 4) = 0.25$?
ב. האם יתכן ש $V(X + Y) = 0$?
ג. נניח שארבעת המשתנים הם בלתי תלויים, מהו $V(X - Y - Z - W)$?
 האם בהכרח מתקבלת אותה תשובה גם אם המשתנים הם תלויים ?

שאלה 3 (60 נקודות)

מבצעים סדרה אין סופית של הטלות בלתי תלויות של קובייה תקינה.

יהיו X_i תוצאות ההטלה ה- i . יהיו $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ויהי W מספר ההטלות עד שנקבל סכום

מצטבר גדול מ 2. כך למשל אם שלושת ההטלות הראשונות הן 1,4,6 אז $S_3 = 1+4+6$ ו $(W=2)$, כי $S_1 = 1 \leq 2$ ו $S_2 = 1+4 > 2$.

- א. איך מתפלג מספר התוצאות הזוגיות ב 5 ההטלות הראשונות?
 - ב. מהי תוחלת מספר ההטלות עד שמקבלים תוצאה 5?
 - ג. מהי תוחלת מספר ההטלות עד שמקבלים תוצאה זהה לתוצאה של ההטלה הראשונה?
 - ד. מהי תוחלת סכום התוצאות ב 5 ההטלות הראשונות בהינתן שבהטלה הראשונה קבלנו תוצאה 2?
 - ה. מהו $E(W)$?
 - ו. מצאו את כל ערכי i , כך ש X_i בלתי תלוי ב W .
-