

בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר לכל תלמיד להשתמש בדף A4 אחד הכתוב משני צדדיו. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים.
מותר להשתמש במחשב כיס.
בבחינה יש 6 שאלות. ענו על כל השאלות.
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.
ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות. הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
אנא, השאירו את העמוד הראשון של מחברת הבחינה ריק.
נמקו את תשובותיכם.

בהצלחה !

שאלה 1 (20 נקודות)

נתון כד שבו 5 כדורים ירוקים ו 3 כדורים אדומים. מוציאים מהכד כדורים באקראי ללא החזרה.
יהי X - משתנה אינדיקטורי שמקבל את הערך 0 אם הכדור שמוצא ראשון הוא אדום ומקבל את הערך 1 אם כדור זה הוא ירוק.
יהי Y - מספר הכדורים הירוקים מבין שני הכדורים שמוצאים ראשונים.

א. מצאו את ההתפלגות המשותפת של X ו Y .

ב. מצאו את התוחלת של Y .

שאלה 2 (40 נקודות)

חשוד עומד לדין לפני 5 שופטים. כל שופט מוצא את החשוד אשם בסיכוי p .
החשוד מורשע אם"ם רוב השופטים מוצאים אותו אשם.
בסעיפים א', ב', ג' נניח שכל שופט מקבל את החלטתו באופן בלתי תלוי בשופטים האחרים.
בסעיף ד' נניח הנחה אחרת.

א. מהי ההסתברות שהחשוד יורשע ?

ב. גיא הוא אחד מהשופטים. מהי ההסתברות שגיא מצא את החשוד אשם, בהינתן שהוא הורשע ?

ג. קבוצת הרוב היא קבוצת השופטים שהחליטו את החלטה שלבסוף התקבלה.

מהי תוחלת גודל קבוצת הרוב ?

ד. כעת נניח ששני השופטים מיכל ועדי הם מתואמים ושהם בהכרח מקבלים את אותה החלטה.
ההחלטות של יתר שלושת השופטים הן בלתי תלויות בהחלטות של כל השופטים האחרים. נניח שוב
שכל שופט מוצא את החשוד אשם בסיכוי p וששוב בשביל הרשעה דרוש שרוב השופטים ימצאו
את החשוד אשם.

מהי ההסתברות שהחשוד יורשע ?

שאלה 3 (12 נקודות)

מבצעים n הטלות בלתי תלויות של קוביה תקינה.
מהי תוחלת מספר התוצאות מבין $\{1,2,3,4,5,6\}$ שיתקבלו בדיוק פעם אחת ?

שאלה 4 (14 נקודות)

יהי X - משתנה מקרי המתפלג $U[1, b]$.
יהי A - המאורע ש X מקבל ערך שהוא כפולה שלמה של 2 (זאת אומרת שהוא מקבל ערך זוגי).
יהי D - המאורע ש X מקבל ערך שהוא כפולה שלמה של 3.

- א.** מצאו ערך אפשרי של b הגדול מ 3, כך שהמאורעות A ו D יהיו בלתי תלויים.
ב. מצאו ערך אפשרי של b הגדול מ 3, כך שהמאורעות A ו D יהיו תלויים.
-

שאלה 5 (12 נקודות)

יהי X - משתנה מקרי המתפלג $G(p)$ עבור $0 < p < 1$.
יהי A - המאורע ש X יקבל ערך זוגי.

- האם קיים פרמטר p כך ש $P(A) < 0.5$?
האם קיים פרמטר p כך ש $P(A) > 0.5$?
האם קיים פרמטר p כך ש $P(A) = 0.5$?
-

שאלה 6 (12 נקודות)

מסדרים באקראי בשורה את ששת המספרים $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ כך שלכל אחד מהסידורים האפשריים יש את אותה הסתברות.
מהי שונות הסכום של חמשת המספרים שממוקמים בחמשת המקומות הימניים יותר ?
