

© כל הזכויות שמורות
 קובץ זה נכתב על-ידי שלומי.
 אין להעתיקו ואין להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

פתרון מקוצר לבחינה מ 05/02/13

שאלה 1

- א.** $P(X = 1, Y = 3) + P(X = 2, Y = 3) = 0.2 + 0.4 = 0.6$
- ב.** $P(X = 2 | Y > 0) = \frac{P(X = 2, Y > 0)}{P(Y > 0)} = \frac{P(X = 2, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3)}{P(Y = 2) + P(Y = 3)} = \frac{0.3 + 0.4}{0.3 + 0.6}$
- ג.** $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = [0.3 \cdot 1 + 0.7 \cdot 2] + [0.1 \cdot 0 + 0.3 \cdot 2 + 0.6 \cdot 3]$
 או בדרך אחרת:
 $E(X + Y) = 0.1(1 + 0) + 0.2(1 + 3) + 0.3(2 + 2) + 0.4(2 + 3)$
- ד.** X מקבל רק את הערכים 1 או 2. לכן, בהסתברות 1 $((X - 1)(X - 2))$ מקבל את הערך 0. המכפלה היא משתנה מקרי ממוון ולכן שונותה היא אפס.

שאלה 2

- א.** $P(X^2 > 5) = P(X > \sqrt{5}) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$
- ב.** $P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4$
- ג.** $P(Z \geq 2) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) = 1 - e^{-1} - e^{-1}$

שאלה 3

- א.** כדי שיהיו שני סיבובים, אסור לאורית לנצח בסיבוב הראשון. היא צריכה להגיע לאחר הסיבוב הראשון לסכום של 1 ואז להפסידו. הסיכוי לכך הוא $0.5 \cdot 0.5$.
- ב.** אם $(X = 3)$, אז לאחר 2 סיבובים עדיין היה לה סכום של 1 או 2. מכיון שמסכום זוגי, בהכרח עוברים לסכום אי זוגי ומסכום אי זוגי בהכרח עוברים לסכום זוגי, אז לאחר שלב 2 (שלב זוגי) בהכרח היו לה 2 שקלים. לכן אם בשלב 3 נפלה ההכרעה, אז היא בהכרח הגיעה ל 3 שקלים. מתקיים $P(Y = 3 | X = 3) = 1$.
- ג.** בכל שלב שעד אליו לא נפלה הכרעה, יש לאורית שקל אחד או שני שקלים והסיכוי שתפול בו הכרעה הוא 0.5. לכן התפלגות מספר הסיבובים היא $G(0.5)$ והתוחלת היא $\frac{1}{0.5} = 2$.

II. פתרון בדרך ראשונה

יהי a - הסיכוי שהיא תגיע אי פעם ל 3 כאשר יש לה 2 שקלים.
יהי b - הסיכוי שהיא תגיע אי פעם ל 3 כאשר יש לה שקל אחד.
מתקיים:

$$\begin{cases} a = 0.5 \cdot 1 + 0.5b \\ b = 0.5 \cdot 0 + 0.5a \end{cases}$$

מתקבל פתרון $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$. לכן, כאשר היא מתחילה עם 2 שקלים, אז סיכוייה

להגיע אי פעם ל 3 שקלים הם $\frac{2}{3}$.

פתרון בדרך שנייה

צריך שמשתנה $G(0.5)$ יקבל ערך אי זוגי. הסיכוי לכך הוא

$$\sum_{i=0}^{\infty} 0.5 \cdot 0.5^{2i} = 0.5 \sum_{i=0}^{\infty} 0.25^i = 0.5 \frac{1}{1-0.25} = \frac{2}{3}$$

שלומי